

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ANDRÉ JACOMEL TORII

ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS  
GENERALIZADO

CURITIBA

2012

ANDRÉ JACOMEL TORII

ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS  
GENERALIZADO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Ciências, Área de Concentração: Mecânica Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Dalledone  
Machado

CURITIBA

2012

À minha esposa, Cristina, a pessoa mais linda deste mundo, que sempre me acompanha  
em todas as minhas aventuras.

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais, Waldemar e Elizabeth, meus maiores professores.

Ao meu orientador, professor Roberto, pela companhia neste longo caminho.

Aos meus grandes amigos, Rafael, Jucélio e Marco.

"Porque se chamavam homens,  
Também se chamavam sonhos,  
E sonhos não envelhecem."

Márcio Borges - Clube da esquina

## RESUMO

A análise dinâmica de estruturas tem como objetivo avaliar a resposta estrutural quando variações temporais que causem efeitos inerciais não possam ser desconsideradas. O Método dos Elementos Finitos (MEF) é atualmente utilizado em larga escala para a análise dinâmica de estruturas, devido à sua robustez e flexibilidade. Além disso, a análise dinâmica de estruturas está intimamente relacionada com a equação da onda, o que aumenta o interesse na formulação de métodos eficientes para a análise dinâmica. O MEF convencional utiliza funções polinomiais para construir soluções aproximadas para um dado problema. Porém, sabe-se que as soluções de problemas relacionados a fenômenos oscilatórios frequentemente envolvem termos trigonométricos. Neste contexto, termos trigonométricos podem ser incorporados às aproximações do MEF através da utilização do Método dos Elementos Finitos Generalizado (MEFG). O MEFG é uma extensão do MEF convencional que permite a inclusão de funções não polinomiais à aproximação. Estas funções são capazes de representar algum comportamento conhecido do fenômeno sendo estudado. Neste trabalho são apresentadas formulações do MEFG para os problemas de: barras sujeitas a deslocamentos axiais, vigas sujeitas a deslocamentos transversais, equação da onda bidimensional e estado plano de tensões. São realizadas análises para a resposta no tempo e análises modais. Os resultados são comparados com aqueles obtidos com o Método dos Elementos Finitos Hierárquico (MEFH) polinomial, uma abordagem que permite a formulação de elementos de alta ordem. Os exemplos estudados indicam um grande potencial do MEFG para a análise dinâmica de problemas que envolvam a participação dos modos de vibração com frequências elevadas.

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos Generalizado. Método dos Elementos Finitos Hierárquico. Análise Dinâmica. Análise para resposta no tempo. Análise Modal.

## **ABSTRACT**

The purpose of structural dynamic analysis is to evaluate the response of a structure when inertial effects caused by time variations are relevant. The Finite Element Method (FEM) is widely used for structural dynamic analysis, mainly because of its robustness and flexibility. Besides, structural dynamics is intimately related to the wave equation, thus increasing the interest in formulating efficient methods for the dynamic analysis of structures. The standard FEM uses polynomials to build approximate solutions for a given problem. However, the solution of problems involving oscillatory phenomena often contains trigonometric functions. In this context, trigonometric functions can be included in the approximations built by the FEM by using the Generalized Finite Element Method (GFEM). The GFEM is an extension of the standard FEM that allows non polynomial functions to be included in the analysis. These functions are able to represent some behavior of the phenomenon being studied. This work presents a GFEM approach for problems involving: bars subject to axial displacements, beams subject to transversal displacements, the two dimensional wave equation and the case of plane stress. Time response and modal analysis are performed. The results are compared to the ones obtained using the Hierarchical Finite Element Method (HFEM), an approach that allows the use of high order polynomial approximations. The examples studied indicate a strong potential of the GFEM for the analysis of problems involving the participation of the vibration modes associated to high vibration frequencies.

Key-words: Generalized Finite Element Method. Hierarchical Finite Element Method. Dynamic Analysis. Time response analysis. Modal analysis.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 4.1 - PARTIÇÃO DA UNIDADE OBTIDA COM AS FUNÇÕES LINEARES DO MEF LAGRANGEANO. . . . .	61
FIGURA 4.2 - FUNÇÕES SENOS E COSENO AO QUADRADO DEFINIDAS DENTRO DE UM ELEMENTO FINITO. . . . .	63
FIGURA 4.3 - PARTIÇÃO DA UNIDADE DADA POR FUNÇÕES SENOS E COSENO AO QUADRADO. . . . .	64
FIGURA 5.1 - ESTIMATIVA DE ERRO DE ACORDO COM A EQUAÇÃO (5.2). . . .	66
FIGURA 6.1 - BARRA SUJEITA A DESLOCAMENTOS AXIAIS. . . . .	69
FIGURA 6.2 - PARTIÇÃO DO DOMÍNIO DO PROBLEMA EM $N_e$ ELEMENTOS FINITOS. . . . .	72
FIGURA 6.3 - POLINÔMIOS DE LAGRANGE PARA $n = 2$ . . . . .	73
FIGURA 6.4 - POLINÔMIOS DE LAGRANGE PARA $n = 3$ . . . . .	74
FIGURA 6.5 - MONTAGEM DA APROXIMAÇÃO GLOBAL ATRAVÉS DO ENCAIXE DE APROXIMAÇÕES LOCAIS. . . . .	75
FIGURA 6.6 - FUNÇÕES DE APROXIMAÇÕES GLOBAIS, OBTIDAS DO ENCAIXE DAS FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO LOCAIS. . . . .	76
FIGURA 6.7 - POLINÔMIOS DE LOBATTO PARA $k = 6$ . . . . .	86
FIGURA 6.8 - FUNÇÕES DE BASE DADAS PELAS EQUAÇÕES (6.68)-(6.71) PARA $\beta = \frac{3\pi}{2}$ . . . . .	89
FIGURA 6.9 - FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO LOCAIS DADAS PELAS EQUAÇÕES (6.73)-(6.76) PARA $\beta = \frac{3\pi}{2}$ . . . . .	90
FIGURA 6.10 - DOIS ESPAÇOS DE APROXIMAÇÃO $V_1$ E $V_2$ . . . . .	93
FIGURA 6.11 - BARRA INCLINADA. . . . .	96
FIGURA 6.12 - EXEMPLO 1: BARRA SUJEITA A DESLOCAMENTOS INICIAIS. . . .	98
FIGURA 6.13 - EXEMPLO 1: DESLOCAMENTOS NO MEIO DA BARRA OBTIDOS COM 11 GRAUS DE LIBERDADE E 5 MODOS DE VIBRAÇÃO PARA a) INTERVALO DE TEMPO 0 – 20s E b) 17 – 20s. . . . .	100
FIGURA 6.14 - EXEMPLO 1: ERROS OBTIDOS COM 11 GRAUS DE LIBERDADE PARA DIFERENTES NÚMEROS DE MODOS INCLUÍDOS NO MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL. . . . .	101
FIGURA 6.15 - EXEMPLO 1: ERROS PERCENTUAIS DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM 11 GRAUS DE LIBERDADE, PARA a) AS 8 PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS NATURAIS E b) AS FREQUÊNCIAS COM ERRO ATÉ 1,2%. . . . .	103



FIGURA 6.16 - EXEMPLO 1: ERROS OBTIDOS COM 19 GRAUS DE LIBERDADE PARA DIFERENTES NÚMEROS DE MODOS INCLUÍDOS NO MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL. . . . .	104
FIGURA 6.17 - EXEMPLO 2: BARRA SUJEITA A FORÇA HARMÔNICA. . . . .	105
FIGURA 6.18 - EXEMPLO 2: DESLOCAMENTOS NO MEIO DA BARRA OBTIDOS COM 21 GRAUS DE LIBERDADE E 10 MODOS DE VIBRAÇÃO PARA a) INTERVALO DE TEMPO 0 – 10s E b) 10 – 20s. . . . .	107
FIGURA 6.19 - EXEMPLO 2: ERROS OBTIDOS COM 21 GRAUS DE LIBERDADE PARA DIFERENTES NÚMEROS DE MODOS INCLUÍDOS NO MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL. . . . .	108
FIGURA 6.20 - EXEMPLO 2: ERROS PERCENTUAIS DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM 21 GRAUS DE LIBERDADE, PARA a) TODAS AS FREQUÊNCIAS NATURAIS E b) AS FREQUÊNCIAS COM ERRO ATÉ 0,05%. . . . .	110
FIGURA 6.21 - EXEMPLO 3: TRELIÇA SUJEITA A DESLOCAMENTOS INICIAIS. . .	112
FIGURA 6.22 - EXEMPLO 3: DESLOCAMENTOS VERTICAIS NO NÓ 1 PARA $\omega = 5000\text{rad/s}$ . . . . .	113
FIGURA 6.23 - EXEMPLO 3: DESLOCAMENTOS VERTICAIS NO NÓ 1 PARA $\omega = 7500\text{rad/s}$ . . . . .	114
FIGURA 6.24 - EXEMPLO 3: DESLOCAMENTOS VERTICAIS NO NÓ 1 PARA $\omega = 10000\text{rad/s}$ . . . . .	115
FIGURA 6.25 - EXEMPLO 3: DESLOCAMENTOS VERTICAIS NO NÓ 2 PARA $\omega = 10000\text{rad/s}$ . . . . .	117
FIGURA 6.26 - EXEMPLO 3: ERROS PERCENTUAIS DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO PARA a) AS 30 PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS NATURAIS E b) AS FREQUÊNCIAS ATÉ $10000\text{rad/s}$ . . . . .	119
FIGURA 7.1 - VIGA SUJEITA A DESLOCAMENTOS TRANSVERSAIS. . . . .	121
FIGURA 7.2 - OS DOZE PRIMEIROS POLINÔMIOS DE BARDELL. . . . .	125
FIGURA 7.3 - PU DEFINIDA POR POLINÔMIOS DE HERMITE. . . . .	129
FIGURA 7.4 - PU, FUNÇÕES DE BASE E O PRODUTO ENTRE AS DUAS PARA $\beta_j = 3\pi/2$ DENTRO DE UMA SUBCOBERTURA. . . . .	130
FIGURA 7.5 - PU E FUNÇÕES DE BASE PARA UM DADO ELEMENTO FINITO, CONSIDERANDO A CONTRIBUIÇÃO DAS SUBCOBERTURAS À ESQUERDA E À DIREITA DO ELEMENTO. . . . .	131
FIGURA 7.6 - FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO DO MPU OBTIDAS COM DIFERENTES VALORES DE $\beta$ . . . . .	132
FIGURA 7.7 - VIGA INCLINADA. . . . .	136
FIGURA 7.8 - EXEMPLO 4: VIGA ENGASTADA SUJEITA A FORÇA HARMÔNICA. . . . .	138

FIGURA 7.9 - EXEMPLO 4: DESLOCAMENTOS VERTICAIS NO MEIO DA VIGA PARA UM INTERVALO DE TEMPO ENTRE 0,09 – 0,10s OBTIDOS COM AS MALHAS DO TIPO a).	139
FIGURA 7.10 - EXEMPLO 4: DESLOCAMENTOS VERTICAIS NO MEIO DA VIGA PARA UM INTERVALO DE TEMPO ENTRE 0,09 – 0,10s OBTIDOS COM AS MALHAS DO TIPO b).	140
FIGURA 7.11 - EXEMPLO 4: DESLOCAMENTOS VERTICAIS NO MEIO DA VIGA PARA UM INTERVALO DE TEMPO ENTRE 0,09 – 0,10s OBTIDOS COM AS MALHAS DO TIPO c).	140
FIGURA 7.12 - EXEMPLO 4: ERROS PERCENTUAIS DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM 26 GRAUS DE LIBERDADE (28 NO CASO DO MEF HERMITIANO), PARA a) AS FREQUÊNCIAS ATÉ 40000rad/s E b) AS FREQUÊNCIAS COM ERRO ATÉ 1,5%.	142
FIGURA 7.13 - EXEMPLO 4: CONVERGÊNCIA DA APROXIMAÇÃO DA PRIMEIRA FREQUÊNCIA NATURAL UTILIZANDO REFINO DO TIPO $h$ .	144
FIGURA 7.14 - EXEMPLO 4: CONVERGÊNCIA DA APROXIMAÇÃO DA SEGUNDA FREQUÊNCIA NATURAL UTILIZANDO REFINO DO TIPO $p$ .	145
FIGURA 7.15 - EXEMPLO 4: CONVERGÊNCIA DA APROXIMAÇÃO DA DÉCIMA FREQUÊNCIA NATURAL UTILIZANDO REFINO DO TIPO $h$ .	145
FIGURA 7.16 - EXEMPLO 4: CONVERGÊNCIA DA APROXIMAÇÃO DA DÉCIMA FREQUÊNCIA NATURAL UTILIZANDO REFINO DO TIPO $p$ .	147
FIGURA 7.17 - EXEMPLO 5: PÓRTICO SUJEITO A FORÇA HARMÔNICA.	148
FIGURA 7.18 - EXEMPLO 5: DESLOCAMENTOS VERTICAIS NO NÓ 3 NO INTERVALO 0,9 – 1,0s OBTIDOS COM AS MALHAS a).	149
FIGURA 7.19 - EXEMPLO 5: DESLOCAMENTOS VERTICAIS NO NÓ 3 NO INTERVALO 0,9 – 1,0s OBTIDOS COM AS MALHAS b).	149
FIGURA 7.20 - EXEMPLO 5: DESLOCAMENTOS VERTICAIS NO NÓ 3 NO INTERVALO 0,9 – 1,0s OBTIDOS COM AS MALHAS c).	150
FIGURA 7.21 - EXEMPLO 5: DESLOCAMENTOS HORIZONTAIS NO NÓ 3 NO INTERVALO DE TEMPO 0,9 – 1,0s OBTIDOS COM AS MALHAS b).	150
FIGURA 7.22 - EXEMPLO 5: ERROS PERCENTUAIS DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM 8 FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO POR ELEMENTO, PARA a) AS FREQUÊNCIAS DE ATÉ 10000 rad/s E b) AS FREQUÊNCIAS COM ERRO ATÉ 1,0%.	152
FIGURA 8.1 - MAPEAMENTO DE UM ELEMENTO FINITO COM GEOMETRIA ARBITRÁRIA (COM LADOS RETOS) PARA UM ELEMENTO FINITO QUADRADO COM COORDENADAS LOCAIS $\xi = [-1, 1]$ E $\eta = [-1, 1]$ .	154
FIGURA 8.2 - FUNÇÕES DE FORMA PARA UM ELEMENTO QUADRADO DE REFERÊNCIA PARA $n = 2$ .	156

FIGURA 8.3 - FUNÇÕES BOLHA E DE BORDA . . . . .	158
FIGURA 8.4 - UMA MALHA COMPOSTA POR DOIS ELEMENTOS FINITOS . . . .	158
FIGURA 8.5 - AS FUNÇÕES DE BORDA COMPARTILHADAS POR DOIS ELEMENTOS FINITOS. . . . .	159
FIGURA 8.6 - EXEMPLO 6: MEMBRANA UTILIZADA PARA SE ESTUDAR AS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO. . . . .	160
FIGURA 8.7 - EXEMPLO 6: ERROS RELATIVOS PARA AS FREQUÊNCIAS NATURAIS OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM DIFERENTES VALORES DE $\beta_1$ . . . . .	161
FIGURA 8.8 - EXEMPLO 6: ERROS RELATIVOS PARA AS FREQUÊNCIAS NATURAIS MAIS BAIXAS OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM $\beta_1 = 2\pi$ . . . . .	161
FIGURA 8.9 - EXEMPLO 6: ERROS RELATIVOS OBTIDOS COM O MEFH E O MEFG COM $\beta_1 = 2\pi$ PARA AS FREQUÊNCIAS NATURAIS COM ERROS MENORES QUE 5%. . . . .	162
FIGURA 8.10 - EXEMPLO 6: ERROS RELATIVOS OBTIDOS COM O MEFH E O MEFG COM $\beta_1 = 2\pi$ UTILIZANDO MALHAS 2X2 E 4X4. . . . .	163
FIGURA 8.11 - EXEMPLO 6: CONVERGÊNCIA DA APROXIMAÇÃO DA PRIMEIRA FREQUÊNCIA NATURAL UTILIZANDO REFINO DO TIPO $h$ . . . . .	165
FIGURA 8.12 - EXEMPLO 6: CONVERGÊNCIA DA APROXIMAÇÃO DA CENTÉSIMA FREQUÊNCIA NATURAL UTILIZANDO REFINO DO TIPO $h$ . . . . .	166
FIGURA 8.13 - EXEMPLO 7: MEMBRANA SUJEITA A CONDIÇÕES DE CONTORNO DEPENDENTES DO TEMPO. . . . .	167
FIGURA 8.14 - EXEMPLO 7: ERROS RELATIVOS PARA AS FREQUÊNCIAS NATURAIS OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM $\beta_1 = 2\pi$ UTILIZANDO MALHAS DADAS POR 6X6 ELEMENTOS FINITOS. . .	168
FIGURA 8.15 - EXEMPLO 7: ERROS RELATIVOS PARA AS FREQUÊNCIAS NATURAIS COM ERROS MENORES QUE 5%, OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM $\beta_1 = 2\pi$ . . . . .	169
FIGURA 8.16 - EXEMPLO 7: DESLOCAMENTOS NO CENTRO DA MEMBRANA PARA $\omega = 30\text{rad/s}$ . . . . .	170
FIGURA 8.17 - EXEMPLO 7: DESLOCAMENTOS NO CENTRO DA MEMBRANA PARA $\omega = 40\text{rad/s}$ . . . . .	171
FIGURA 8.18 - EXEMPLO 7: DESLOCAMENTOS NO CENTRO DA MEMBRANA PARA $\omega = 50\text{rad/s}$ . . . . .	172
FIGURA 8.19 - EXEMPLO 7: ERROS OBTIDOS PARA A ANÁLISE DE RESPOSTA NO TEMPO COM DIFERENTES VALORES DA FREQUÊNCIA DE EXCITAÇÃO. . . . .	172

FIGURA 8.20 - EXEMPLO 8: MEMBRANA SUJEITA A CONDIÇÕES DE CONTORNO DEPENDENTES DO TEMPO. . . . .	173
FIGURA 8.21 - EXEMPLO 8: ERROS RELATIVOS PARA AS FREQUÊNCIAS NATURAIS OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM $\beta_1 = 2\pi$ UTILIZANDO MALHAS DADAS POR 2X2 ELEMENTOS. . . . .	174
FIGURA 8.22 - EXEMPLO 8: ERROS RELATIVOS PARA AS FREQUÊNCIAS NATURAIS COM ERROS MENORES QUE 5%, OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM $\beta_1 = 2\pi$ . . . . .	174
FIGURA 8.23 - EXEMPLO 8: DESLOCAMENTOS NO CENTRO DA MEMBRANA PARA $\omega = 10\text{rad/s}$ . . . . .	175
FIGURA 8.24 - EXEMPLO 8: DESLOCAMENTOS NO CENTRO DA MEMBRANA PARA $\omega = 12,5\text{rad/s}$ . . . . .	176
FIGURA 8.25 - EXEMPLO 8: DESLOCAMENTOS NO CENTRO DA MEMBRANA PARA $\omega = 15\text{rad/s}$ . . . . .	177
FIGURA 8.26 - EXEMPLO 8: ERROS OBTIDOS PARA A ANÁLISE DE RESPOSTA NO TEMPO COM DIFERENTES VALORES DA FREQUÊNCIA DE EXCITAÇÃO. . . . .	177
FIGURA 8.27 - EXEMPLO 9: MEMBRANA SUJEITA A CONDIÇÕES DE CONTORNO DEPENDENTES DO TEMPO. . . . .	178
FIGURA 8.28 - EXEMPLO 9: MALHAS UTILIZADAS PARA AS ANÁLISES. . . . .	179
FIGURA 8.29 - EXEMPLO 9: ERROS RELATIVOS PARA AS FREQUÊNCIAS NATURAIS OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM $\beta_1 = 2\pi$ , UTILIZANDO MALHAS DADAS POR 2X2 ELEMENTOS. . . . .	180
FIGURA 8.30 - EXEMPLO 9: ERROS RELATIVOS PARA AS FREQUÊNCIAS NATURAIS MAIS BAIXAS, OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM $\beta_1 = 2\pi$ E MALHAS 2X2. . . . .	181
FIGURA 8.31 - EXEMPLO 9: DESLOCAMENTOS NO MEIO DA BORDA ESQUERDA DA MEMBRANA PARA $\omega = 9\text{rad/s}$ , OBTIDOS COM A MALHA DISTORCIDA COM NÓ CENTRAL POSICIONADO EM $(x; y) = (0,625; 0,625)\text{m}$ . . . . .	182
FIGURA 8.32 - EXEMPLO 9: DESLOCAMENTOS NO MEIO DA BORDA ESQUERDA PARA $\omega = 15\text{rad/s}$ OBTIDOS COM A MALHA UNIFORME. . . . .	183
FIGURA 8.33 - EXEMPLO 9: DESLOCAMENTOS NO MEIO DA BORDA ESQUERDA PARA $\omega = 15\text{rad/s}$ , OBTIDOS COM A MALHA DISTORCIDA COM NÓ CENTRAL POSICIONADO EM $(x; y) = (0,625; 0,625)\text{m}$ . . . . .	184
FIGURA 9.1 - MAPEAMENTO DE UM ELEMENTO FINITO COM GEOMETRIA ARBITRÁRIA (APROXIMADA POR UM POLINÔMIO DE SEGUNDA ORDEM) PARA UM ELEMENTO DE REFERÊNCIA COM COORDENADAS LOCAIS $\xi = [-1, 1]$ E $\eta = [-1, 1]$ . . . . .	186
FIGURA 9.2 - EXEMPLO 10: CHAPA QUADRADA. . . . .	187

FIGURA 9.3 - EXEMPLO 10: MALHAS UTILIZADAS PARA O PROBLEMA DA CHAPA QUADRADA. . . . .	188
FIGURA 9.4 - EXEMPLO 10: ERROS RELATIVOS DAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM DIFERENTES VALORES DE $\beta_1$ E MALHAS UNIFORMES. . . . .	188
FIGURA 9.5 - EXEMPLO 10: ERROS RELATIVOS DAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO MAIS BAIXAS OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM $\beta_1 = 2\pi$ E MALHAS UNIFORMES. . . . .	190
FIGURA 9.6 - EXEMPLO 10: ERROS RELATIVOS DAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM MEFH E O MEFG COM DIFERENTES VALORES DE $\beta_1$ E MALHAS DISTORCIDAS, PARA DIFERENTES FAIXAS DE FREQUÊNCIA. . . . .	191
FIGURA 9.7 - EXEMPLO 10: ERROS RELATIVOS DAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM DIFERENTES VALORES DE $\beta_1$ E MALHAS SEVERAMENTE DISTORCIDAS, PARA DIFERENTES FAIXAS DE FREQUÊNCIAS. . . . .	192
FIGURA 9.8 - EXEMPLO 10: ERROS RELATIVOS DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM $\beta_1 = 2\pi$ E MALHAS UNIFORMES DADAS POR 2X2 E 4X4 ELEMENTOS, PARA DIFERENTES FAIXAS DE FREQUÊNCIAS. . . . .	193
FIGURA 9.9 - EXEMPLO 11: CHAPA COM FURO CIRCULAR. . . . .	195
FIGURA 9.10 - EXEMPLO 11: MALHA UTILIZADA PARA MODELAR METADE DA CHAPA COM FURO CIRCULAR. . . . .	195
FIGURA 9.11 - EXEMPLO 11: ERROS RELATIVOS DAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM DIFERENTES VALORES DE $\beta_1$ , PARA DIFERENTES FAIXAS DE FREQUÊNCIAS. . . . .	196
FIGURA 9.12 - EXEMPLO 12: CHAPA QUADRADA SUJEITA A CARREGAMENTO DE IMPACTO. . . . .	197
FIGURA 9.13 - EXEMPLO 12: ERROS RELATIVOS DAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM $\beta_1 = 2\pi$ , PARA DIFERENTES FAIXAS DE FREQUÊNCIAS. . . . .	198
FIGURA 9.14 - EXEMPLO 12: CARREGAMENTO DE IMPACTO. . . . .	199
FIGURA 9.15 - EXEMPLO 12: DESLOCAMENTOS HORIZONTAIS NO CENTRO DA CHAPA QUADRADA PARA UM CARREGAMENTO DE IMPACTO COM DURAÇÃO $t_f = 2 \times 10^{-4} \text{s}$ . . . . .	199
FIGURA 9.16 - EXEMPLO 12: DESLOCAMENTOS HORIZONTAIS NO CENTRO DA CHAPA QUADRADA PARA UM CARREGAMENTO DE IMPACTO COM DURAÇÃO $t_f = 1 \times 10^{-3} \text{s}$ . . . . .	201
FIGURA 9.17 - EXEMPLO 13: ESTRUTURA SUJEITA A UM CARREGAMENTO HARMÔNICO. . . . .	201

FIGURA 9.18 - EXEMPLO 13: ERROS RELATIVOS DAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG, PARA DIFERENTES FAIXAS DE FREQUÊNCIAS. . . . .	202
FIGURA 9.19 - EXEMPLO 13: DESLOCAMENTOS HORIZONTAIS NO NÓ COM COORDENADA $(0; 20)\text{m}$ , PARA UM CARREGAMENTO HARMÔNICO COM FREQUÊNCIA $\omega = 50\text{rad/s}$ , OBTIDOS COM O MEFH E O MEFG COM $\beta_1 = 2\pi$ . . . . .	204

## LISTA DE TABELAS

TABELA 6.1 - EXEMPLO 1: ERROS (m.s) OBTIDOS COM 11 GRAUS DE LIBERDADE PARA DIFERENTES NÚMEROS DE MODOS INCLUÍDOS NO MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL. . . . .	99
TABELA 6.2 - EXEMPLO 1: ERROS PERCENTUAIS (%) DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM 11 GRAUS DE LIBERDADE. . . . .	102
TABELA 6.3 - EXEMPLO 1: ERROS (m.s) OBTIDOS COM 19 GRAUS DE LIBERDADE PARA DIFERENTES NÚMEROS DE MODOS INCLUÍDOS NO MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL. . . . .	104
TABELA 6.4 - EXEMPLO 2: ERROS (m.s) OBTIDOS COM 21 GRAUS DE LIBERDADE PARA DIFERENTES NÚMEROS DE MODOS INCLUÍDOS NO MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL. . . . .	106
TABELA 6.5 - EXEMPLO 2: ERROS PERCENTUAIS (%) DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM 21 GRAUS DE LIBERDADE. . . . .	109
TABELA 6.6 - EXEMPLO 3: ERROS PERCENTUAIS (%) DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO. . . . .	118
TABELA 7.1 - EXEMPLO 4: ERROS PERCENTUAIS (%) DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM 26 GRAUS DE LIBERDADE (28 NO CASO DO MEF HERMITIANO). . . . .	142
TABELA 7.2 - EXEMPLO 4: ERROS PERCENTUAIS (%) DA PRIMEIRA FREQUÊNCIA NATURAL DE VIBRAÇÃO OBTIDA COM REFINO DO TIPO $h$ . . . . .	143
TABELA 7.3 - EXEMPLO 4: ERROS PERCENTUAIS (%) DA SEGUNDA FREQUÊNCIA NATURAL DE VIBRAÇÃO OBTIDA COM REFINO DO TIPO $p$ . . . . .	144
TABELA 7.4 - EXEMPLO 4: ERROS PERCENTUAIS (%) DA DÉCIMA FREQUÊNCIA NATURAL DE VIBRAÇÃO OBTIDA COM REFINO DO TIPO $h$ . . . . .	146
TABELA 7.5 - EXEMPLO 4: ERROS PERCENTUAIS (%) DA DÉCIMA FREQUÊNCIA NATURAL DE VIBRAÇÃO OBTIDA COM REFINO DO TIPO $p$ . . . . .	146
TABELA 7.6 - EXEMPLO 5: COORDENADAS NODAIS DO PÓRTICO DA FIGURA 7.17. . . . .	147
TABELA 7.7 - EXEMPLO 5: ERROS PERCENTUAIS (%) DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM 8 FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO POR ELEMENTO. . . . .	151

TABELA 8.1 - EXEMPLO 6: ERROS RELATIVOS (%) PARA AS 10 PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM DIFERENTES VALORES DE $\beta_1$ . . . . .	163
TABELA 8.2 - EXEMPLO 6: ERROS RELATIVOS (%) PARA AS 5 PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM $\beta_1 = 2\pi$ COM MALHAS 2X2 E 4X4. . . . .	163
TABELA 8.3 - EXEMPLO 6: ERROS PERCENTUAIS (%) DA PRIMEIRA FREQUÊNCIA NATURAL DE VIBRAÇÃO OBTIDA COM REFINO DO TIPO $h$ . . . . .	165
TABELA 8.4 - EXEMPLO 6: ERROS PERCENTUAIS (%) DA CENTÉSIMA FREQUÊNCIA NATURAL DE VIBRAÇÃO OBTIDA COM REFINO DO TIPO $h$ . . . . .	165
TABELA 8.5 - EXEMPLO 9: ERROS (m.s) CALCULADOS PARA A RESPOSTA NO TEMPO UTILIZANDO O MEFH E O MEFG COM $\beta_1 = 2\pi$ EM FUNÇÃO DA POSIÇÃO DO NÓ CENTRAL. . . . .	181
TABELA 9.1 - EXEMPLO 10: ERROS RELATIVOS (%) DAS 20 PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM DIFERENTES VALORES DE $\beta_1$ E MALHAS UNIFORMES. . . .	189
TABELA 9.2 - EXEMPLO 10: ERROS RELATIVOS (%) DAS 20 PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM $\beta_1 = 2\pi$ E MALHAS UNIFORMES DADAS POR 2X2 E 4X4 ELEMENTOS. . . . .	194
TABELA 9.3 - EXEMPLO 11: ERROS RELATIVOS (%) PARA AS 10 PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM DIFERENTES VALORES DE $\beta_1$ . . . . .	196
TABELA 9.4 - EXEMPLO 13: ERROS RELATIVOS (%) DAS 20 PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG. . . . .	203



## LISTA DE SIGLAS

MC	-	Método Composto
MDF	-	Método das Diferenças Finitas
ME	-	Método das Esferas Finitas
MEC	-	Método dos Elementos de Contorno
MEF	-	Método dos Elementos Finitos
MEFE	-	Método dos Elementos Finitos Estendido
MEFF	-	Método dos Elementos Finitos $p$ -Fourier
MEFG	-	Método dos Elementos Finitos Generalizado
MEFH	-	Método dos Elementos Finitos Hierárquico
MMA	-	Método dos Modos Admissíveis
MMC	-	Método do Modo Componente
MN	-	Método das Nuvens
MPU	-	Método da Partição da Unidade
MSM	-	Método Sem Malha
PU	-	Partição da Unidade
PVC	-	Problema de Valores de Contorno
PVCV	-	Problema de Valores de Contorno Variacional

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a(\bullet, \bullet)$	- Forma bilinear
$c$	- Velocidade de propagação de onda
$c_i$	- Valores de graus de liberdade genéricos
diam	- Diâmetro de um conjunto
dim	- Dimensão de um espaço vetorial
$e$	- Erro
gera	- Espaço vetorial gerado por uma base
$h$	- Tamanho característico dos elementos finitos em uma malha
$i$	- Índice
inf	- Infimum
$j$	- Índice
$k$	- Ordem de um polinômio ou um índice
$l(\bullet)$	- Funcional linear
$l_i$	- Funções de aproximação de um elemento finito dadas por polinômios
max	- Valor máximo de uma função ou vetor
min	- Valor mínimo de uma função ou vetor
$n$	- Número de funções de forma unidimensionais utilizadas para gerar as funções de forma bidimensionais ou um índice
sup	- Supremum
$t$	- Tempo ou espessura de um placa no caso do estado plano de tensões
$\mathbf{u}$	- Vetor de graus de liberdade do MEF e do MEFG
$\ddot{\mathbf{u}}$	- Vetor com derivadas segundas em relação ao tempo (acelerações) dos graus de liberdade do MEF e do MEFG
$u$	- Solução exata de um PVC ou deslocamentos axiais em uma barra
$u_h$	- Solução aproximada
$u_h^e$	- Solução aproximada dentro de um elemento finito
$u_i$	- Valores de graus de liberdade nodais
$u^*$	- Solução exata de um PVCV
$v$	- Função de teste ou função de base do MPU
$v_h$	- Função de teste pertencente ao espaço aproximado
$w$	- Deslocamentos transversais de uma barra
$x$	- Posição em um dado domínio
$y$	- Posição em um dado domínio
$A$	- Operador diferencial ou área da seção transversal de uma barra
$B$	- Operador diferencial
$C$	- Espaço das funções contínuas em um dado intervalo
$C^m$	- Espaço das funções com derivadas de ordem $m$ contínuas em um dado intervalo
$E$	- Módulo de elasticidade
$\mathbf{F}$	- Vetor de forças global
$\mathbf{F}^e$	- Vetor de forças de um elemento
$H^m$	- Espaço de Sobolev das funções com derivadas de ordem até $m$ que sejam quadraticamente integráveis no sentido de Lebesgue
$I$	- Momento de inércia da seção transversal de uma barra

$\mathbf{K}$	- Matriz de rigidez global
$\mathbf{K}^e$	- Matriz de rigidez de um elemento
$L$	- Comprimento de uma barra, viga ou elemento finito
$L^m$	- Espaço das funções integráveis no sentido de Lebesgue
$\mathbf{M}$	- Matriz de massa global
$\mathbf{M}^e$	- Matriz de massa de um elemento
$N$	- Dimensão de um espaço vetorial
$N_e$	- Número de elementos finitos de uma malha
$P_k$	- Espaço dos polinômios de ordem até $k$
$Q_h$	- Conjunto contendo os domínios dos elementos finitos
$R^n$	- Espaço dos números reais de ordem $n$
$V$	- Espaço de funções admissíveis
$V^h$	- Espaço de funções aproximado
$\beta$	- Parâmetro utilizado para alterar as funções do MPU utilizadas no MEFG
$\eta$	- Coordenadas locais dentro de um elemento finito
$\lambda$	- Autovalor de um problema de autovalores e autovetores
$\lambda_h$	- Autovalor aproximado de um problema de autovalores e autovetores
$\nu$	- Coeficiente de Poisson
$\xi$	- Coordenadas locais dentro de um elemento finito
$\xi_i$	- Posição de um nó de um elemento finito em coordenadas locais
$\rho$	- Massa específica
$\phi$	- Função de ponderação
$\Phi$	- Autovetor de um problema de autovalores e autovetores
$\Phi_h$	- Autovetor aproximado de um problema de autovalores e autovetores
$\phi_i$	- Funções de aproximação globais
$\varphi_i$	- Funções que compõem uma PU
$\chi$	- Coordenadas locais dentro de uma subcobertura
$\psi_i$	- Funções de aproximação locais de um elemento finito
$\omega$	- Frequência natural de vibração exata ou frequência de excitação
$\omega_h$	- Frequência natural de vibração aproximada
$\Gamma$	- Contorno de um domínio $\Omega$
$\Delta t$	- Passo de tempo utilizado para a análise para resposta no tempo
$\Omega$	- Domínio
$\overline{\Omega}$	- Fechamento de um domínio $\Omega$ , dado por $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$
$\Omega_e$	- Domínio de um elemento finito
$\Omega_i$	- Subcoberturas que compõem uma PU
$\partial\Omega$	- Contorno de um domínio $\Omega$
$ \bullet $	- Valor absoluto de um escalar
$\ \bullet\ $	- Norma
$(\bullet, \bullet)$	- Produto interno
$\nabla$	- Operador Gradiente
$\nabla^2$	- Operador de Laplace

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>23</b>
1.1	OBJETIVOS	25
1.1.1	Objetivo geral	25
1.1.2	Objetivos específicos	25
1.2	JUSTIFICATIVA	25
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO	26
<b>2</b>	<b>REVISÃO DA LITERATURA</b>	<b>28</b>
2.1	ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS	29
2.1.1	Análise modal	29
2.1.2	Análise dinâmica para resposta no tempo	30
2.1.3	Análise de Vibrações Randômicas	32
2.2	MÉTODOS DE SOLUÇÃO APROXIMADA PARA PROBLEMAS DE VALORES DE CONTORNO	33
2.2.1	Método das Diferenças Finitas	33
2.2.2	Método dos Elementos Finitos	34
2.2.3	Método dos Elementos de Contorno	35
2.2.4	Métodos Sem Malha	36
2.2.5	Métodos baseados no Método dos Elementos Finitos	37
2.2.6	Método dos Elementos Finitos Hierárquicos	39
2.2.7	Método dos Elementos Finitos Generalizado	41
<b>3</b>	<b>FUNDAMENTOS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS</b>	<b>44</b>
3.1	PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO	44
3.2	PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO VARIACIONAL	45
3.3	MÉTODO DE GALERKIN	46
3.3.1	Propriedades do Método de Galerkin	48
3.4	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	51
3.4.1	Propriedades gerais do Método dos Elementos Finitos	53
3.4.2	Particionamento de $\overline{\Omega}$	53
3.4.3	Interpolação local	54
3.4.4	Montagem	54

3.4.5	Definição de elemento finito . . . . .	56
<b>4</b>	<b>FUNDAMENTOS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADO .</b>	<b>58</b>
4.1	MÉTODO DA PARTIÇÃO DA UNIDADE . . . . .	58
4.1.1	Partição da Unidade dada pelas funções de forma do MEF Lagrangeano . .	60
4.1.2	Partição da Unidade dada por funções trigonométricas . . . . .	62
<b>5</b>	<b>AVALIAÇÃO DE ERROS PARA RESPOSTA NO TEMPO E CONDICIONAMENTO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES . . . . .</b>	<b>65</b>
5.1	AVALIAÇÃO DE ERROS PARA RESPOSTA NO TEMPO . . . . .	65
5.2	CONDICIONAMENTO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES . . . . .	68
<b>6</b>	<b>ELEMENTO DE BARRA <math>C^0</math> COM DESLOCAMENTOS AXIAIS . . . . .</b>	<b>69</b>
6.1	O MÉTODO DE GALERKIN PARA O PROBLEMA ESTÁTICO . . . . .	69
6.2	O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA O PROBLEMA ESTÁTICO . .	71
6.2.1	Particionamento de $\overline{\Omega}$ . . . . .	71
6.2.2	Interpolação local . . . . .	72
6.2.3	Montagem . . . . .	75
6.2.4	Estimadores de erros . . . . .	78
6.3	O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA O PROBLEMA DINÂMICO . .	80
6.3.1	Estimadores de erros para problemas de análise dinâmica . . . . .	82
6.4	O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS HIERÁRQUICO . . . . .	83
6.5	O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADO . . . . .	88
6.5.1	A equivalência das funções de base modificadas . . . . .	91
6.5.2	Uma nota sobre a convergência monotônica dos resultados . . . . .	93
6.6	ESTRUTURAS TRELIÇADAS . . . . .	96
6.7	ASPECTOS DE IMPLEMENTAÇÃO . . . . .	97
6.8	RESULTADOS . . . . .	98
6.8.1	Exemplo 1: barra sujeita a deslocamentos iniciais . . . . .	98
6.8.2	Exemplo 2: barra sujeita a força harmônica . . . . .	104
6.8.3	Exemplo 3: treliça sujeita a força harmônica . . . . .	111
<b>7</b>	<b>ELEMENTOS DE VIGA <math>C^1</math> DE EULER-BERNOULLI . . . . .</b>	<b>121</b>
7.1	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS HIERÁRQUICO . . . . .	123
7.2	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADO . . . . .	128
7.2.1	Escolha das funções de base . . . . .	134
7.3	PÓRTICOS . . . . .	135

7.4	ASPECTOS DE IMPLEMENTAÇÃO . . . . .	137
7.5	RESULTADOS . . . . .	138
7.5.1	Exemplo 4: Viga engastada sujeita a força harmônica . . . . .	138
7.5.2	Exemplo 5: Pórtico sujeito a força harmônica . . . . .	147
<b>8</b>	<b>EQUAÇÃO DA ONDA BIDIMENSIONAL . . . . .</b>	<b>153</b>
8.1	MEFH POLINOMIAL E MEFG PARA UM ELEMENTO DE REFERÊNCIA . . . . .	154
8.2	ASPECTOS DE IMPLEMENTAÇÃO . . . . .	156
8.3	RESULTADOS . . . . .	159
8.3.1	Exemplo 6: frequências naturais de vibração de uma membrana . . . . .	159
8.3.2	Exemplo 7: membrana sujeita a condições de contorno dependentes do tempo	167
8.3.3	Exemplo 8: membrana sujeita a condições de contorno dependentes do tempo	169
8.3.4	Exemplo 9: malha distorcida . . . . .	178
<b>9</b>	<b>ESTADO PLANO DE TENSÕES . . . . .</b>	<b>185</b>
9.1	RESULTADOS . . . . .	187
9.1.1	Exemplo 10: chapa quadrada com malha distorcida . . . . .	187
9.1.2	Exemplo 11: chapa com furo circular . . . . .	194
9.1.3	Exemplo 12: chapa quadrada sujeita a carregamento de impacto . . . . .	197
9.1.4	Exemplo 13: estrutura sujeita a carregamentos dependentes do tempo . . . . .	200
<b>10</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>206</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>210</b>
	<b>APÊNDICE A - SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DA ANÁLISE DINÂMICA</b>	<b>218</b>
A.1	MÉTODO DE NEWMARK . . . . .	218
A.2	MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL . . . . .	221

## 1 INTRODUÇÃO

Peças, máquinas e estruturas podem ser submetidas a dois tipos de análises estruturais: estática e dinâmica. A análise estática tem como objetivo estudar o comportamento estrutural quando as variações temporais dos deslocamentos da estrutura ocorrem em intervalos de tempo suficientemente grandes, de forma que efeitos inerciais possam ser desprezados. Já a análise dinâmica tem como objetivo estudar o comportamento estrutural quando os efeitos inerciais não podem ser desprezados, através da identificação das propriedades dinâmicas da estruturas ou da resposta estrutural ao longo do tempo.

A importância da análise estática é bastante evidente, uma vez que a maioria das estruturas deve ser capaz de suportar algum tipo de carregamento que não varie com o tempo. Porém, muitas peças, máquinas e estruturas estão sujeitas a situações onde o comportamento dinâmico é de suma importância. Alguns exemplos são estruturas civis que devam suportar equipamentos que gerem vibrações, estruturas civis sujeitas a terremotos, componentes mecânicos de motores, máquinas e equipamentos que apresentem deslocamentos dependentes do tempo, entre outros. Nestes casos a análise estática não é capaz de caracterizar a estrutura apropriadamente, uma vez que não considera o efeito das variações temporais. Efeitos dinâmicos como a ressonância, por exemplo, podem ocasionar deslocamentos exagerados e conseqüentemente levar à falha estrutural. Além disso, variações de tensões dentro de estruturas podem ocasionar fadiga do material, ocasionando a falha estrutural em regimes de tensões que não seriam nocivos no caso estático. Por fim, a vibração excessiva de uma máquina ou estrutura pode inviabilizar sua utilização devido ao desconforto gerado.

Outra importância da análise dinâmica de estruturas é o crescente número de técnicas de identificação de defeitos em peças e estruturas baseadas nesta análise (SHAH; RIBAKOV, 2008; SIMANI; FANTUZZI, 2006; VIOLA et al., 2001; LAW; LU, 2005). Estes métodos baseiam-se na ideia de que a introdução de um defeito na estrutura alterará suas características dinâmicas e que estas alterações podem ser previstas por um modelo computacional. Assim, aplicando-se uma excitação conhecida e medindo-se a resposta da estrutura real é possível identificar se a peça apresenta ou não defeitos. Estas técnicas são de grande valor para a engenharia, pois possibilitam a avaliação da integridade estrutural reduzindo o tempo de intervenção no equipamento ou na estrutura. Além disso, muitos problemas de diversas áreas das ciências e engenharias estão relacionados com fenômenos oscilatórios ou de propagação de ondas. Assim, o desenvolvimento de métodos mais precisos para a solução de problemas da análise dinâmica pode apontar caminhos para casos não necessariamente relacionados à estruturas.

A análise dinâmica de estruturas pode ser vista como uma subárea da mecânica dos sólidos (TIMOSHENKO; GOODIER, 1951; FUNG, 1965; MALVERN, 1969). Assim como ocorre para a maioria dos problemas da mecânica dos sólidos, os problemas da análise dinâmica são escritos, de maneira geral, como problemas de valor de contorno e problemas de valores iniciais (TIMOSHENKO; GOODIER, 1951; CHOPRA, 1995). Portanto, a solução analítica destes problemas é possível apenas em alguns casos bastante simplificados.

Em muitos problemas de interesse prático é necessário trabalhar com algum tipo de solução aproximada. Devido à popularização dos computadores digitais e da disseminação de rotinas computacionais para a resolução de problemas de engenharia, existe hoje uma forte tendência a se utilizar métodos numéricos aproximados para a resolução dos problemas da análise estrutural.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método numérico aproximado largamente utilizado na análise estrutural, tanto para problemas estáticos como para problemas dinâmicos. Sendo um método aproximado, as soluções obtidas pelo MEF quase sempre apresentam erros em relação à solução exata do problema. De forma geral, estes erros podem ser reduzidos diminuindo-se o tamanho dos elementos finitos ou aumentando-se a ordem da aproximação, o que implica em um maior esforço computacional. Assim, em muitos casos é possível obter uma solução arbitrariamente precisa aumentando-se o esforço computacional envolvido. Porém, muitos problemas abordados atualmente requerem grande esforço computacional mesmo quando discretizações relativamente pobres são utilizadas, devido à sua complexidade ou tamanho. Nestes casos a obtenção de soluções com elevado grau de precisão pode necessitar de muito tempo de processamento ou até mesmo ser inviável do ponto de vista prático. Neste contexto, o desenvolvimento de métodos que permitam a obtenção de soluções com elevado grau de precisão pode reduzir o esforço computacional em problemas correntes e permitir a solução de problemas que estavam até então fora do alcance dos métodos de solução aproximados. Isto faz com que mais alternativas estruturais possam ser avaliadas em cada caso, permitindo que melhores soluções estruturais sejam adotadas.

Diversas alternativas para se obter melhores resultados com o MEF para problemas da análise dinâmica já foram propostas. Porém, os trabalhos de Arndt (2009) e Arndt et al. (2010) mostraram que uma abordagem bastante promissora pode ser obtida ao se utilizar os conceitos do Método da Partição da Unidade (MPU), apresentados originalmente por Melenk e Babuska (1996a, 1996b) e Babuska e Melenk (1997).

Arndt (2009) estudou a aplicação do Método dos Elementos Finitos Generalizado (MEFG) para o problema da análise modal de estruturas compostas por barras e vigas,



obtendo resultados mais precisos do que os métodos disponíveis atualmente. Isto porque o MPU e sua extensão, o MEFG (STROUBOULIS et al., 2001), permitem introduzir na aproximação informações relativas à natureza do fenômeno sendo estudado.

Este trabalho apresenta uma formulação do MEFG para a análise dinâmica de barras sujeitas a deslocamentos axiais, treliças, vigas de Euler-Bernoulli, pórticos, equação da onda em duas dimensões e estado plano de tensões. As principais contribuições deste trabalho são a extensão do método apresentado originalmente por Arndt (2009) para casos bidimensionais e a sua aplicação na análise modal e análise dinâmica para resposta no tempo.

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1.1 Objetivo geral

Aplicar o MEFG para problemas da análise modal e análise para resposta no tempo em barras, treliças, vigas de Euler-Bernoulli, pórticos, equação da onda em duas dimensões e estado plano de tensões.

### 1.1.2 Objetivos específicos

Revisar os fundamentos do MEF polinomial tradicional e sua aplicação para a solução de problemas da análise dinâmica. Estender os conceitos do MEF tradicional para o Método dos Elementos Finitos Hierárquico (MEFH), possibilitando a utilização de elementos finitos de ordem arbitrária.

Estudar em detalhes os conceitos básicos do MPU e do MEFG. Desenvolver formulações baseadas no MPU e no MEFG para problemas da análise dinâmica de barras, treliças, vigas de Euler-Bernoulli, pórticos, equação da onda bidimensional e estado plano de tensões.

Comparar a eficiência do MEF e do MEFG através de exemplos numéricos, utilizando soluções analíticas ou soluções aproximadas com alto grau de precisão.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

Cada vez mais as soluções de engenharia têm sido concebidas buscando-se a redução de custos e racionalização de processos. Neste contexto, a concepção de estruturas eficientes e racionais pode ser realizada apenas quando o comportamento

estrutural é conhecido em detalhes, pois a redução de custos sem o conhecimento das implicações ao comportamento estrutural pode elevar o risco de falhas. O comportamento dinâmico das estruturas requer atenção particular, uma vez que os métodos disponíveis para a análise destes problemas requerem, em geral, grande esforço computacional. Assim, o desenvolvimento de métodos de análise mais precisos pode reduzir o esforço necessário para se obter resultados com mesmo grau de acurácia. Isto permite que mais alternativas estruturais sejam investigadas, possibilitando que soluções estruturais mais eficientes sejam adotadas.

O problema da análise dinâmica de estruturas está intimamente relacionado com a equação da onda. Diversos problemas das ciências e engenharias são regidos pela equação da onda ou alguma equação semelhante. Assim, o desenvolvimento de métodos mais precisos para a solução de problemas da análise dinâmica de estruturas pode resultar em métodos mais precisos para a solução de diversos problemas das ciências e engenharias que estejam relacionados com fenômenos oscilatórios ou de propagação de ondas.

Sabe-se que os modos mais altos de vibração são particularmente importantes para problemas relativos à propagação de ondas. Nestes casos, uma boa aproximação para o comportamento global do problema não garante necessariamente uma boa aproximação para as variações locais dentro do domínio. O MEF polinomial convencional pode encontrar dificuldades em aproximar com precisão os modos mais altos de vibração. Assim, espera-se que o MEFG seja capaz de obter bons resultados para problemas relacionados com a propagação de ondas.

### 1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está dividido em dez capítulos. O Capítulo 2 apresenta uma revisão geral do estado da arte em relação à solução aproximada de problemas de valores de contorno e iniciais, discutindo as principais características dos principais métodos existentes. Além disso, particular atenção é dada para o recente desenvolvimento do MPU, do MEFG, de métodos enriquecidos e aplicações relacionadas com a análise dinâmica.

O Capítulo 3 apresenta uma revisão dos conceitos fundamentais do MEF. Inicia-se apresentando o Método de Galerkin, que é utilizado para obter uma solução aproximada. Neste contexto, o MEF pode ser visto como uma forma de se obter o espaço de aproximação necessário para que o Método de Galerkin possa ser aplicado.

O Capítulo 4 descreve as principais características do MEFG, que é baseado no MPU. Neste capítulo são apresentados os principais resultados relacionados aos espaços

de aproximação resultantes do MPU.

No Capítulo 5 é descrito brevemente como os erros para as análises para resposta no tempo foram avaliados. Também é apresentada a definição do número de condicionamento de um sistema de equações lineares, característica importante para a solução numérica de sistemas de equações.

O Capítulo 6 apresenta a formulação do MEFG proposto para problemas de barras sujeitas apenas a deslocamentos axiais. Neste capítulo é descrita em detalhes a aplicação do Método de Galerkin e a construção dos espaços de aproximação através do MEF. Inicia-se obtendo as equações do problema para o caso estático. Posteriormente os conceitos são estendidos para o caso da análise dinâmica. Alguns estimadores de erros são apresentados, de forma a descrever o comportamento geral do MEF para problemas deste tipo. É apresentada então a formulação do MEFH polinomial e do MEFG. Por fim, são apresentados exemplos de aplicação.

O Capítulo 7 aborda o problema de vigas de Euler-Bernoulli. Primeiramente é apresentada uma formulação para o MEFH polinomial, que é utilizado para comparação dos resultados. É então apresentada a formulação do MEFG para o problema. Após estender os conceitos para o caso de estruturas de pórticos são apresentados exemplos de aplicação.

No Capítulo 8 é abordada a equação da onda em duas dimensões. Este capítulo apresenta a importante transição para o caso bidimensional, discutindo principalmente como as funções de aproximação em duas dimensões podem ser obtidas a partir das funções unidimensionais apresentadas nos capítulos anteriores. Após apresentar a formulação do problema são discutidos aspectos de implementação computacional. Devido à maior complexidade dos problemas em duas dimensões estes aspectos são discutidos em detalhes. São então apresentados exemplos de aplicação que demonstram uma grande eficiência do MEFG para este problema.

O Capítulo 9 aplica as funções de aproximação obtidas para a equação da onda para o problema do estado plano de tensões. É demonstrado que as funções de aproximação permanecem inalteradas e a formulação do problema é apresentada. São então apresentados exemplos numéricos.

As conclusões do trabalho e sugestões para trabalhos futuros são apresentadas no Capítulo 10.

No Apêndice A são descritos o Método da Superposição Modal e o Método de Newmark, que são utilizados para as análise dinâmicas neste trabalho.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

Os problemas da análise dinâmica de estruturas são modelados, de forma geral, como problemas de valores iniciais e de valores de contorno. Porém, a solução analítica destes problemas é possível apenas em alguns casos bastante simplificados. Muitos dos problemas de interesse prático abordados atualmente podem ser resolvidos apenas de maneira aproximada, devido à complexidade do domínio do problema, dos materiais que compõem a estrutura ou das condições de contorno e iniciais. Neste contexto, os métodos numéricos de solução aproximada são frequentemente as ferramentas mais eficientes para se abordar os problemas da análise dinâmica.

Entre os métodos de solução numérica aproximada deve-se destacar o Método das Diferenças Finitas (MDF) (AMES, 1977), o MEF (BATHE, 1996), o Método dos Elementos de Contorno (MEC) (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992) e os Métodos Sem Malha (MSM) (LIU, 2003). De forma geral, é possível resolver os problemas da análise dinâmica utilizando-se qualquer um destes métodos. Porém, cada um deles possui características bastante distintas, o que afeta a eficiência de sua aplicação em cada tipo de problema. Uma breve comparação entre o MEF e o MEC para o problema da análise dinâmica de estruturas é apresentada por Torii et al. (2011a, 2011b).

A análise dinâmica para resposta no tempo pode ser decomposta em dois subproblemas. O primeiro é a aproximação das variações temporais, que é feita tradicionalmente utilizando-se algum método de integração no tempo, como o Método de Newmark, o Método de Houbolt, o Método da Diferença Central ou o Método de Superposição Modal (BATHE, 1996). Alguns destes métodos são descritos no Apêndice A. O segundo problema é a solução aproximada das equações de campo para um dado tempo, que é feita tradicionalmente utilizando o MEF, o MEC, o MDF ou o MSM. Assim, a obtenção de soluções mais precisas depende tanto da aproximação adequada das variações temporais quanto da solução aproximada das equações para um dado tempo em questão.

Este trabalho tem como objetivo estudar o comportamento do MEFG para a solução aproximada das equações de campo e, portanto, os métodos de integração no tempo não são estudados em maiores detalhes. Por este motivo a revisão da literatura se reduz a textos clássicos no caso dos métodos da análise dinâmica.

## 2.1 ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS

A maioria dos problemas da análise dinâmica de estruturas pode ser classificado em três grupos. No primeiro caso são buscados os modos e as frequências fundamentais de vibração de uma estrutura com o intuito de caracterizar o comportamento estrutural, mas não são buscadas variações temporais de deslocamentos. Este procedimento é comumente chamado de Análise Modal. No segundo caso busca-se reproduzir a variação dos deslocamentos ao longo do tempo de uma estrutura sujeita a forças variáveis ou a condições iniciais, procedimento designado aqui de Análise para Resposta no Tempo. No terceiro caso é estudado o comportamento de uma estrutura sujeita a vibrações de caráter aleatório, procedimento comumente designado Vibrações Randômicas. Estes três tipos de análise são descritos brevemente a seguir.

### 2.1.1 Análise modal

A Análise Modal é abordada tanto em textos sobre o MEF (BATHE, 1996) quanto em textos sobre a análise dinâmica (CHOPRA, 1995). O problema principal da Análise Modal é obter os modos fundamentais de vibração e as frequências de vibração de uma estrutura ou um corpo qualquer através da solução do problema de autovalores e autovetores dado por

$$\mathbf{K}\phi = \omega^2\mathbf{M}\phi, \quad (2.1)$$

onde  $\omega$  são as frequências de vibração e  $\phi$  são os modos de vibração.

A solução numérica dos problemas de autovalores e autovetores é sabidamente onerosa do ponto de vista do esforço computacional (BATHE, 1996; HUGHES, 1987). Algoritmos para a solução deste problema são descritos em detalhes por Bathe (1996), Hughes (1987), Quarteroni et al. (2007) e Stoer e Bulirsch (1993). Uma comparação entre os diversos algoritmos para a solução deste problema foi apresentada por Morgan (2000). Dentre os métodos disponíveis para a solução deste problema deve-se destacar o método iterativo de Lanczos (BATHE, 1996; HUGHES, 1987), devido à sua eficiência e popularidade.

As frequências e os modos de vibração de uma estrutura são suas características dinâmicas mais essenciais (CHOPRA, 1995). São estas variáveis que definem quais tipos de excitações dinâmicas podem ser nocivas à estrutura. Por este motivo o estudo do comportamento dinâmico das estruturas começa, de forma geral, pela Análise Modal.

Além disso, os modos e as frequências de vibração são dados necessários para se aplicar o Método da Superposição Modal, que é uma das técnicas mais utilizadas para

a análise para resposta no tempo de estruturas com comportamento linear (BATHE, 1996; CHOPRA, 1995). Por fim, o estudo do efeito de Vibrações Randômicas sobre a estrutura também depende da obtenção dos modos e frequências de vibração (CHOPRA, 1995; CLOUGH; PENZIEN, 1975; MEIROVITCH, 1975), evidenciando assim a importância da Análise Modal no contexto geral da análise dinâmica.

### 2.1.2 Análise dinâmica para resposta no tempo

Assim como a Análise Modal, a Análise para Resposta no Tempo é abordada tanto em textos sobre a análise dinâmica (CHOPRA, 1995; MEIROVITCH, 1980) como em textos sobre o MEF (BATHE, 1996; HUGHES, 1987). Neste caso busca-se a resposta estrutural em um dado intervalo de tempo de uma estrutura sujeita a condições iniciais de deslocamentos, velocidades e acelerações e sujeita a carregamentos dependentes do tempo.

De maneira geral, a análise para resposta no tempo é efetuada fazendo-se uma discretização do intervalo de tempo contínuo em uma série de tempos discretos a serem analisados. Escreve-se então uma aproximação para as variações temporais que relacione os deslocamentos, velocidades e acelerações em diferentes tempos.

Os diversos métodos utilizados para se resolver este problema diferenciam-se na forma da aproximação utilizada. Algoritmos que se aplicam ao sistema de equações original são geralmente chamados de Métodos de Integração Direta (BATHE, 1996). Dentre estes métodos os mais tradicionais são: o Método de Newmark (BATHE, 1996; HUGHES, 1987; CHOPRA, 1995; MEIROVITCH, 1980), o Método de Houbolt (BATHE, 1996; HUGHES, 1987; CHOPRA, 1995) e o Método da Diferença Central (BATHE, 1996; CHOPRA, 1995). Porém, diversas abordagens menos tradicionais estão também disponíveis na literatura (HUGHES, 1987; FUNG, 1997; KIRSCH; BOGOMOLNI, 2007; DI PAOLA; FAILLA, 2004; CHANG, 2010; CHIEN et al., 2003).

Os Métodos de Integração Direta podem ser classificados, por sua vez, em dois grupos (BATHE, 1996): os métodos implícitos e os métodos explícitos. O Método de Newmark e o Método de Houbolt são exemplos de métodos implícitos. Neste caso, as aproximações temporais para um tempo  $t$  são obtidas considerando-se o equilíbrio no próprio tempo  $t$ . Isto permite que o método resultante possa ser incondicionalmente estável (BATHE, 1996; HUGHES, 1987; CHOPRA, 1995), garantindo que a solução numérica não apresente carácter divergente mesmo para passos de tempo relativamente grandes. Porém, os métodos implícitos requerem, de forma geral, um maior esforço computacional por passo de tempo, uma vez que as equações resultantes neste caso podem ser mais complexas no sentido da resolução dos sistemas de equações.

O Método da Diferença Central é um exemplo de um método explícito. Neste caso as aproximações temporais para um tempo  $t$  são obtidas considerando-se o equilíbrio em um tempo  $t - 1$ . Isto permite uma redução no esforço computacional por passo de tempo, principalmente quando algumas simplificações são introduzidas, como a utilização de matrizes de massa diagonalizadas (BATHE, 1996). Porém, o método torna-se condicionalmente estável e pode apresentar caráter divergente caso um passo de tempo muito grande seja utilizado. Valores limites para o tamanho do passo de tempo a ser utilizado para os métodos explícitos são apresentados por Bathe (1996), Hughes (1987) e Chopra (1995).

Deve-se salientar que a eficiência e precisão dos métodos de integração direta dependem das características do problema a ser resolvido. Os métodos explícitos podem ser muito eficientes nos casos em que sejam utilizadas matrizes de massa diagonalizadas (BATHE, 1996), pois assim a solução das equações para cada passo de tempo terá um custo computacional bastante reduzido uma vez que as equações tornam-se desacopladas. Já os métodos implícitos podem ser muito eficientes nos casos onde grandes passos de tempo são suficientes para se obter a precisão desejada, uma vez que, neste caso, um número menor de passos de tempo poderá ser utilizado.

Observa-se que o Método de Newmark e o Método da Diferença Central são mais populares do que o Método de Houbolt para a solução de problemas da análise dinâmica quando da utilização do MEF (BATHE, 1996; HUGHES, 1987). Isto porque o método de Newmark é, em geral, mais preciso do que o Método de Houbolt, enquanto que o Método da Diferença Central resulta em equações mais simples de serem resolvidas.

Neste trabalho optou-se por utilizar o Método de Newmark para a integração direta no tempo, pois as matrizes de massa utilizadas não são diagonalizadas para preservar a precisão do MEF. Assim, não existiria vantagem computacional em se utilizar o Método da Diferença Central. Além disso, sabe-se que o o Método de Houbolt e o Método da Diferença Central podem inserir amortecimento numérico artificial das vibrações (BATHE, 1996; HUGHES, 1987), o que pode prejudicar a precisão das respostas obtidas.

Outra forma de se obter a resposta no tempo de uma estrutura com comportamento linear, muito utilizada na prática, é o Método da Superposição Modal. Neste caso a resposta estrutural é escrita como a superposição de diversos modos fundamentais de vibração da estrutura, que podem ser obtidos da análise modal. Este procedimento é descrito em detalhes por Bathe (1996), Chopra (1995) e no Apêndice A deste trabalho.

A principal vantagem do Método da Superposição Modal é que esta abordagem utiliza os modos fundamentais de vibração da estrutura, dados que geralmente devem ser obtidos para se efetuar um estudo dinâmico satisfatório das estruturas através da Análise

Modal. Isto permite uma redução no custo computacional, uma vez que o sistema de equações resultantes é desacoplado em diversas equações independentes. É possível também utilizar apenas os modos de vibração mais relevantes para o problema, o que permite a obtenção de soluções precisas com custo computacional bastante reduzido. Por fim, modos que foram aproximados com pouca precisão podem ser excluídos da análise evitando que estes degradem a solução.

A maior desvantagem do Método da Superposição Modal é que, a princípio, esta abordagem não é válida para problemas não lineares. Isto porque nestes casos a estrutura não possui modos fundamentais uma vez que os deslocamentos afetam a rigidez do sistema estrutural (BATHE, 1996). Nestes casos costuma-se, portanto, utilizar os métodos de integração direta.

### 2.1.3 Análise de Vibrações Randômicas

A Análise de Vibrações Randômicas é abordada em textos sobre a análise dinâmica (CHOPRA, 1995; CLOUGH; PENZIEN, 1975; MEIROVITCH, 1975). Esta área da análise dinâmica busca caracterizar a resposta estrutural para uma família de excitações que possuam características semelhantes, mas que podem apresentar realizações diferentes.

Exemplos deste tipo de excitação são aquelas causadas por terremotos. Neste caso, pode-se caracterizar os sismos de uma dada região através de alguns parâmetros básicos relacionados à intensidades e frequências componentes (MEIROVITCH, 1975; CHOPRA, 1995), mas de forma geral cada sismo será dado por uma excitação ao longo do tempo diferente dos demais. Outras áreas de aplicação das Vibrações Randômicas são as excitações dinâmicas causadas pelo vento e as excitações causadas por ondas oceânicas.

A maior parte dos fundamentos da Análise de Vibrações Randômicas requer a caracterização prévia da estrutura através de seus modos e frequências naturais de vibração (MEIROVITCH, 1975). Este fato coloca em evidência a importância da Análise Modal. É também necessário descrever a excitação randômica através de alguns valores característicos. A partir destes dados é possível construir o espectro de resposta de uma estrutura, que relaciona a energia envolvida na resposta dinâmica para excitações de diferentes frequências (MEIROVITCH, 1975; CHOPRA, 1995). Isto permite ao analista avaliar se a estrutura estará segura quando submetida à excitações com características semelhantes àquela analisada.



## 2.2 MÉTODOS DE SOLUÇÃO APROXIMADA PARA PROBLEMAS DE VALORES DE CONTORNO

Uma vez que algum esquema para as aproximações temporais tenha sido adotado, o problema se transforma em um problema de valores de contorno para cada passo de tempo discreto. Diversos métodos de solução numérica aproximada podem ser aplicados com sucesso em problemas da análise dinâmica com esta finalidade. Alguns destes métodos são descritos a seguir.

### 2.2.1 Método das Diferenças Finitas

O MDF é um método muito popular para a solução de problemas de valores de contorno e iniciais e, portanto, também utilizado para a solução de problemas da análise dinâmica (AMES, 1977; LEVEQUE, 2007).

A ideia básica do MDF é aproximar os operadores diferenciais das equações que regem o problema de valores de contorno e iniciais na forma forte, baseando-se no conceito da série de Taylor (AMES, 1977). Isto permite que a solução aproximada seja avaliada em diversos pontos do domínio do problema. A precisão do método pode então ser aumentada discretizando-se o operador diferencial em mais pontos do domínio ou aumentando-se a ordem da aproximação do operador diferencial.

A principal vantagem do MDF é que sua aplicação é relativamente simples, uma vez que depende basicamente das fórmulas utilizadas para se aproximar os operadores diferenciais (AMES, 1977; LEVEQUE, 2007). Isto permite que o MDF seja aplicado a problemas cujos operadores diferenciais são bastante complexos. Um exemplo destes casos são os problemas da dinâmica dos fluidos, onde frequentemente as equações diferenciais envolvem termos relativos ao movimento do fluido, à propagação de calor no fluido ou à dispersão de alguma substância no meio (HIRSCH, 1988). A modelagem de problemas desta natureza, que consideram diversos aspectos, pode levar a equações diferenciais bastante complexas, o que dificulta a aplicação do MEF ou do MEC.

Uma desvantagem do MDF é que a discretização do domínio é simples para problemas com geometrias retangulares, mas torna-se mais complexa para geometrias arbitrárias (AMES, 1977; HIRSCH, 1988). Problemas com geometrias não retangulares podem ser discretizados através de um processo de transformação de coordenadas, mas este procedimento requer a utilização de uma malha estruturada (HIRSCH, 1988). Porém, em muitos casos de interesse prático é difícil construir este tipo de malha, o que pode dificultar a aplicação do MDF.

### 2.2.2 Método dos Elementos Finitos

Aplicações do MEF em sua formulação polinomial mais tradicional são apresentadas por Bathe (1996), Hughes (1987), Carey e Oden (1984) e Zienkiewicz e Taylor (2000). A ideia básica do MEF em sua forma mais tradicional é aplicar o Método de Galerkin à forma fraca do problema sendo estudado, como descrito no Capítulo 3. O MEF preocupa-se então em construir um espaço de aproximação apropriado de maneira simples e padronizada para ser utilizado pelo Método de Galerkin.

A principal vantagem do MEF é que as equações básicas do problema podem ser formuladas para um elemento de geometria simples e conhecida e, através dele, reproduzir o domínio original pelo encaixe de diversos elementos. Isto permite que praticamente qualquer tipo de domínio possa ser modelado.

Do ponto de vista computacional, uma grande vantagem do MEF é que as matrizes utilizadas para se resolver a maioria dos problemas são simétricas e esparsas, isto é, contêm muitos termos nulos (BATHE, 1996; HUGHES, 1987; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000). Esquemas muito eficientes para se trabalhar com matrizes esparsas podem ser encontrados na literatura, o que reduz significativamente o esforço computacional necessário para se resolver o problema. Além disso, a solução de sistemas de equações lineares para matrizes simétricas costuma ser mais eficiente do que a solução para matrizes não simétricas, devido aos algoritmos de solução disponíveis (QUARTERONI et al., 2007; STOER; BULIRSCH, 1993).

Outra vantagem do MEF é a sua sólida fundamentação matemática (CIARLET, 1978; REDDY, 1998; ODEN; CAREY, 1983). Isto porque o MEF pode ser estudado no contexto dos Problemas de Valores de Contorno Variacionais (PVCV) (CIARLET, 1978; ODEN; CAREY, 1983), para os quais existem diversos resultados relacionados à existência e unicidade de soluções. Além disso, grande parte dos resultados relacionados às propriedades do MEF podem ser obtidos da Teoria da Aproximação para polinômios (KREYSZIG, 1978; ODEN; CAREY, 1983), o que permite escrever estimadores de erro para diversos problemas.

Uma desvantagem do MEF é que a aplicação do método requer que a forma fraca do problema seja obtida (REDDY, 1998; ODEN; CAREY, 1983). Para problemas regidos por equações diferenciais muito complexas a utilização de uma forma fraca pode não ser flexível o bastante para acomodar as diversas hipóteses de modelagem que podem ser feitas (HIRSCH, 1988).

Outra desvantagem do MEF é que este método necessita de uma malha que, em geral, deve coincidir com o domínio do problema (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000; CAREY; ODEN, 1984). Assim, em problemas que apresentem domínios variáveis, pode ser

necessário refazer a malha de elementos finitos diversas vezes durante a análise. Além disso, o processo de construção da malha de elementos finitos pode requerer um considerável esforço computacional (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000; CAREY; ODEN, 1984), tornando a aplicação do MEF pouco eficiente nestes casos. Um exemplo deste tipo de problema é o estudo da propagação de trincas, sendo que a propagação da trinca representa uma alteração do domínio do problema (DUARTE et al., 2001; BELYTSCHKO et al., 1995).

As aproximações obtidas com o MEF podem ser melhoradas de três maneiras (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000; HUGHES, 1987; BATHE, 1996; BECKER et al., 1981). A primeira é manter o tamanho dos elementos fixos mas aumentar a ordem da aproximação dentro dos elementos, procedimento denominado de refino  $p$ , onde  $p$  representa a ordem do polinômio interpolador utilizado. A segunda maneira é manter a ordem da aproximação fixa, mas aumentar o número de elementos finitos reduzindo-se assim o tamanho de cada elemento. Este procedimento é designado de refino  $h$ , onde  $h$  representa o tamanho dos elementos finitos. Finalmente, pode-se melhorar a aproximação aumentando-se a ordem e reduzindo-se o tamanho dos elementos, procedimento chamado usualmente de refino  $hp$ .

Tradicionalmente sabe-se que o refino  $p$  pode ocasionar taxas de convergência melhores do que o refino  $h$  para a maior parte dos problemas com soluções suaves e sem singularidades (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000). Porém, o refino  $h$  é mais simples de ser utilizado na prática pois reutiliza sempre os mesmos tipos de elementos para todas as discretizações. Já o refino  $p$  para elementos de ordem arbitrária é dificultado pela geração das funções de aproximação apropriadas. Uma forma de se evitar esta dificuldade é a utilização do MEFH, como descrito mais adiante.

### 2.2.3 Método dos Elementos de Contorno

O MEC, por ser bastante popular para a solução de problemas de valores de contorno, também é aplicado a problemas da análise dinâmica com bastante sucesso, como descrito por Brebbia e Nardini (1983), Carrer e Mansur (1999), Oyarzún et al. (2011), Wrobel (2002), Wrobel e Aliabadi (2002) e Gaul et al. (2003).

O MEC baseia-se na formulação integral do problema, que pode ser obtida enfraquecendo a forma variacional do problema (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992; TORII et al., 2011b). Pode-se dizer, portanto, que o MEC trabalha com uma forma mais fraca do problema do que aquela utilizada no MEF. Uma comparação bastante resumida entre o MEF e o MEC é apresentada por Torii et al. (2011b) e por Torii et al. (2011a).

A principal característica do MEC é que, sob certas condições, as variáveis do problema são avaliadas apenas no contorno (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992). Isto pode reduzir

o esforço computacional envolvido e facilitar a discretização do problema. O cálculo de variáveis no interior do domínio pode ser feita após as quantidades no contorno terem sido avaliadas e tem, portanto, caráter de pós-processamento (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992; WROBEL, 2002; WROBEL; ALIABADI, 2002).

Porém, alguns problemas necessitam de algum tipo de discretização do domínio, como os problemas de treliças e pórticos. Nestes casos a aplicação do MEC é limitada, pois o método pode necessitar de procedimentos especiais, como é o caso das vigas que compõem um dado pórtico (NETO et al., 2000). Além disso, as matrizes resultantes do MEC costumam ser não simétricas e não esparsas, o que aumenta o esforço computacional necessário para um mesmo número de graus de liberdade em comparação com o MEF.

#### 2.2.4 Métodos Sem Malha

Os MSM, por serem relativamente mais recentes que os outros métodos descritos acima, não são ainda tão populares. Alguns trabalhos que abordam a aplicação de métodos sem malha em problemas da análise dinâmica foram apresentados por Zhou et al. (2005), Liu et al. (1995), Liew et al. (2009, 2004, 2002) e Shishvan et al. (2009).

Diferentemente do que ocorre para o MDF, o MEF e o MEC, os MSM não são caracterizados pela forma da equação diferencial a ser discretizada. Ou seja, os MSM podem ser aplicados à forma forte, à forma fraca ou à forma integral das equações governantes do problema (LIU, 2003). A característica básica dos MSM é que estes métodos evitam a utilização de uma malha. Neste caso, a discretização é feita através da definição de pontos onde a solução será aproximada.

A maior vantagem dos MSM é que estes métodos podem ser aplicados com bastante sucesso para problemas que possuam domínios variáveis, como demonstrado por Jun et al. (1998) e Belytschko et al. (1995). Isto porque a discretização do domínio é um procedimento relativamente simples no caso dos MSM e pode ser feita de forma automática.

Outra vantagem de alguns MSM é que o aumento da ordem da aproximação utilizada pode ser feita de maneira simples (DUARTE; ODEN, 1996; LISZKA et al., 1996; LIU, 2003). Assim, em casos que requerem soluções bastante precisas em alguns pontos estratégicos do domínio, os MSM podem ser uma opção eficiente. Um exemplo deste tipo de problema é o caso da análise de tensões próximas a uma singularidade como descrito por Belytschko et al. (1995) e Lyszka et al. (1996).

Porém, ao evitar a utilização de malhas, os MSM requerem um esforço especial na construção das funções de aproximação a serem utilizadas (LIU, 2003). Este esforço a mais pode tornar o método pouco eficiente em problemas nos quais a geração da malha

não seja uma questão problemática.

Outra desvantagem dos MSM é que, de maneira geral, são necessários procedimentos específicos para se aplicar as condições de contorno essenciais dos problemas (LIU, 2003). Dois destes procedimentos especiais são o Método dos Multiplicadores de Lagrange e os Métodos de Penalidades (CAREY; ODEN, 1983; BREZZI; FORTIN, 1991; LIU, 2003), que pode também ser utilizado para formulações mistas do MEF (BREZZI; FORTIN, 1991). Isto pode ocasionar dificuldades na aplicação dos métodos a problemas da análise dinâmica, como discutido por Cho et al. (2008), aumentar o esforço computacional necessário, além de tornar as rotinas computacionais mais complexas.

#### 2.2.5 Métodos baseados no Método dos Elementos Finitos

Existem diversos métodos que possuem as características básicas do MEF acrescidas de algum tipo de modificação ou enriquecimento. Arndt (2009) e Arndt et al. (2010) classificaram um grupo de métodos orientados para a análise dinâmica e baseados no MEF como métodos dos elementos finitos enriquecidos. Isto porque estes métodos partem de uma aproximação polinomial como utilizada no MEF tradicional e enriquecem o espaço de aproximação com funções que representem os modos de vibração locais das partes componentes.

Alguns dos métodos que compartilham estas características em comum são: o Método do Modo Componente (MMC) (WEAVER; LOH, 1985), o Método dos Modos Admissíveis (MMA) (ENGELS, 1992; GANESAN; ENGELS, 1992), o Método Composto (MC) (ZENG, 1998a, 1998b; ARNDT et al., 2003), o Método dos Elementos Finitos  $p$ -Fourier (MEFF) (LEUNG; CHAN, 1998) e o MEFG (STROUBOULIS et al., 2001; ARNDT, 2009; ARNDT et al., 2010). Uma comparação bastante detalhada entre estes métodos foi apresentada no trabalho de Arndt (2009).

Segundo Weaver e Loh (1985), a modelagem numérica de estruturas treliçadas pode apresentar resultados bastante diferentes dos reais, pois neste caso apenas deslocamentos longitudinais são considerados. Porém, no caso real as barras componentes das treliças podem apresentar também vibrações transversais localizadas, devido ao seu comportamento flexional. Portanto, Weaver e Loh (1985) propuseram que o efeito da vibração transversal fosse considerado no elemento de barra através da inclusão de funções de forma que reproduzissem este efeito. Este procedimento foi nomeado MMC por Weaver e Loh (1985), que também demonstraram que resultados bastantes distintos eram obtidos ao se considerar o efeito flexional localizado das barras, principalmente para estruturas com um número reduzido de barras. Porém, em seu trabalho original sobre o MMC, Weaver e Loh (1985) não abordaram formas de se aprimorar a aproximação dos

deslocamentos longitudinais, o que distingue o objetivo de seu trabalho original do objetivo dos outros métodos descritos nesta seção e do objetivo do presente trabalho.

O MMA, proposto originalmente por Engels (1992) e Ganesan e Engels (1992), utiliza como espaço de aproximação a união entre um espaço que represente deslocamentos estáticos e outro espaço que represente deslocamentos dinâmicos. O espaço que representa deslocamentos estáticos pode ser tomado como o próprio espaço de aproximação do MEF polinomial. Já o espaço que representa os deslocamentos dinâmicos é composto por funções que representem os modos admissíveis de vibração da estrutura e que se anulem nos nós dos elementos. Assim, o MMA tem caráter de método enriquecido, uma vez que utiliza o espaço original de MEF enriquecido por um espaço que visa representar os modos de vibração da estrutura.

O MC, proposto originalmente por Zeng (1998a) e Zeng (1998b), visa aprimorar a aproximação dos deslocamentos longitudinais no caso de elementos de barra e aprimorar a aproximação dos deslocamentos transversais no caso de elementos de viga. Segundo Zeng (1998a), o MEF possui a vantagem de produzir espaços de aproximação completos e conformes (CAREY; ODEN, 1983; HUGHES, 1987). Isto garante que o método seja monotonicamente convergente e que seja capaz de reproduzir estados de tensão constantes e deslocamentos de corpo rígido. Porém, as funções de forma tradicionais do MEF são polinômios, enquanto que as soluções tradicionais de problemas da análise dinâmica envolvem termos trigonométricos e hiperbólicos.

Assim, Zeng (1998a) propôs uma forma de se adicionar termos relacionados à solução analítica de uma barra ou viga de Euler-Bernoulli ao espaço de aproximação originado pelo MEF. Estes termos adicionais são obtidos da solução do problema considerando a barra ou a viga isoladamente, impondo condições de contorno que garantam que as propriedades de conformidade do MEF sejam mantidas. Já as propriedades de completitude são herdadas do MEF, pois suas funções de forma originais são mantidas. Nos trabalhos de Zeng (1998a) e Zeng (1998b) foram comparados os resultados do MC com os do MEF, porém sem estudar o efeito do aumento da ordem da aproximação utilizada pelo MEF. Os resultados mostraram uma grande superioridade do MC sobre o MEF com ordem constante. Resultados semelhantes foram obtidos por Arndt et al. (2003). Por fim, Arndt (2009) observou que o MC pode ser visto como uma versão do MMA, onde os modos admissíveis são os próprios modos de vibração analíticos.

Leung e Chan (1998) propuseram a utilização de termos trigonométricos como enriquecimento do espaço de aproximação do MEF polinomial, denominando o método resultante de MEFF. Porém, os termos trigonométricos não podem interferir nos graus de liberdade nodais, de forma a não modificar os procedimentos tradicionais de imposição de condições de contorno do MEF. No caso de elementos de barra, o enriquecimento é feito

utilizando-se funções seno que se anulem nos nós dos elementos. No caso dos elementos de viga de Euler-Bernoulli uma precaução adicional deve ser tomada. As funções de enriquecimento devem não apenas se anular nos nós, como também suas derivadas primeiras. Isto porque no caso dos elementos de viga de Euler-Bernoulli as derivadas primeiras da aproximação representam as rotações, que são também graus de liberdade nodais. O método resultante foi capaz de obter resultados de grande precisão. Posteriormente o MEFF foi aplicado para o problema de vigas curvas (LEUNG; ZHU, 2004) e para o problema de vibrações planas (LEUNG et al., 2004).

Um método que baseia-se no MEF mas não pode ser visto como um método enriquecido é o Método dos Elementos Finitos Spline (LEUNG; AU, 1990). Neste caso, as funções de aproximação utilizadas são curvas do tipo spline, mas não são adicionadas as funções polinomiais tradicionais do MEF. Porém, esta abordagem não respeita a condição  $\delta$  do MEF, que vale quando apenas uma função é não nula em cada nó. Isto faz com que procedimentos especiais devem ser tomados para se aplicar as condições de contorno.

Um método de carácter diferente dos métodos enriquecidos, mas de certa forma relacionado ao MEF, é o Método da Rigidez Dinâmica (BANERJEE, 1997; LEVY; EISENBERGER, 1999). Segundo Levy e Eisenberger (1999), o MEF não é capaz de obter as frequências e modos de vibração analíticos, pois a matriz de massa obtida não é exata devido à sua própria formulação. Assim, no Método da Rigidez Dinâmica escreve-se a discretização do problema de forma a se obter relações que sejam exatas para estruturas de barras. Este procedimento permite que soluções bastante precisas sejam obtidas. Porém, a solução do problema é feita resolvendo-se um problema de autovalores e autovetores não-lineares (BANERJEE, 1997; LEVY; EISENBERGER, 1999). Além disso, o algoritmo de solução do Método da Rigidez Dinâmica tem carácter bastante diferente do algoritmo tradicional do MEF, o que dificulta sua aplicação para uma maior gama de problemas.

## 2.2.6 Método dos Elementos Finitos Hierárquicos

O MEF na sua forma mais tradicional para problemas de segunda ordem utiliza polinômios de Lagrange como funções de aproximação locais (HUGHES, 1987; BECKER et al., 1981; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000; REDDY, 1998). Isto porque estes polinômios são relativamente fáceis de se construir e respeitam a condição  $\delta$  do MEF, que facilita a aplicação de condições de contorno e processamento de quantidades nodais.

Porém, os polinômios de Lagrange de ordem  $k$  são todos diferentes dos polinômios de Lagrange de ordem  $k + 1$  (HUGHES, 1987; BECKER et al., 1981), como mostrado no Capítulo 6. Isto dificulta que a aproximação seja melhorada aumentando-se

a ordem da aproximação polinomial, pois neste caso todos os polinômios deveriam ser obtidos novamente.

A ideia do MEFH é a de utilizar como espaço de aproximação espaços que sejam hierárquicos. Ou seja, ao se aumentar a ordem da aproximação de  $k$  para  $k + 1$  as funções utilizadas para  $k$  não se alteram. É difícil rastrear a origem do MEFH, mas parece ter sido Peano (1976) o primeiro a apresentar a ideia básica do método.

Neste contexto, o MC, o MMC, o MMA e o MEFF apresentam-se como métodos hierárquicos, pois as funções de aproximação são reaproveitadas quando a ordem da aproximação é aumentada.

A construção de espaços de aproximação hierárquicos polinomiais para problemas de segunda ordem (barras e estado plano de tensões, por exemplo) é descrita em detalhes por Solín et al. (2004). Neste caso, uma forma bastante simples de se construir espaços de aproximação hierárquicos é utilizar polinômios de Lobatto ao invés de polinômios de Lagrange como funções de aproximação locais.

Para problemas de quarta ordem (vigas de Euler-Bernoulli e placas finas, por exemplo) existem duas tendências distintas. A primeira consiste em gerar espaços de aproximação hierárquicos que sejam polinomiais. Esta abordagem é descrita por Bardell (1991) e Beslin e Nicolas (1997). Outra abordagem é a de se utilizar funções trigonométricas que sejam semelhantes às funções polinomiais, mas que possuam melhores características para a manipulação numérica. Esta abordagem é descrita por Beslin e Nicolas (1997), Houmat (1997) e Ribeiro (2001).

A vantagem de se utilizar espaços de aproximação polinomiais é que os resultados tradicionais do MEF, como os estimadores de erros, permanecem válidos no caso do MEFH. Porém, observou-se que os polinômios de alta ordem podem ocasionar problemas de precisão numérica devido às operações de truncamento (BESLIN; NICOLAS, 1997). Estes erros podem tornar a utilização de polinômios pouco eficiente do ponto de vista prático. Assim, Beslin e Nicolas (1997) e Houmat (1997), aparentemente de maneira independente, propuseram a utilização de funções trigonométricas que se assemelhem aos polinômios que seriam obtidos do MEFH. Estas funções trigonométricas tem a vantagem de ocasionarem menores erros de truncamento e serem mais fáceis de se obter (BESLIN; NICOLAS, 1997; HOUMAT, 1997). Os resultados obtidos por Beslin e Nicolas (1997) e Houmat (1997) mostram que quando são utilizadas aproximações de ordem alta a utilização de funções trigonométricas é vantajosa. Porém, os estimadores de erros obtidos para o MEF polinomial não são válidos neste caso, o que torna a abordagem menos formal do ponto de vista matemático.



### 2.2.7 Método dos Elementos Finitos Generalizado

O MEFG é baseado no MPU, originalmente apresentado por Melenk e Babuska (1996a, 1996b) e Babuska e Melenk (1997). Melenk e Babuska (1996a, 1996b) e Babuska e Melenk (1997) apresentaram uma forma de se gerar espaços de aproximação a partir de funções de base quaisquer, através de um procedimento de multiplicação das funções de base por uma Partição da Unidade (PU). O conceito de partição da unidade já era conhecido há bastante tempo (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000), mas Melenk e Babuska (1996a) mostraram que o espaço obtido do MPU era capaz de herdar as propriedades de aproximação do espaço original e as propriedades de conformidade e regularidade da partição da unidade. Posteriormente, Strouboulis et al. (2001) e Babuska et al. (2004) apresentaram o MEFG, que pode ser visto como uma extensão do MPU assumindo que o espaço de aproximação é dado da união do espaço de aproximação do MPU com o espaço de aproximação tradicional do MEF.

Segundo Babuska et al. (2003), diversos métodos são estritamente relacionados ao MEFG, por serem baseados no MPU. Estes métodos são: o Método das Nuvens *hp* (MN) (DUARTE; ODEN, 1996; ODEN et al., 1998; LISZKA et al., 1996), o Método das Esferas Finitas (ME) (DE; BATHE, 2001) e o Método dos Elementos Finitos Estendido (MEFE) (DAUX et al., 2000; ABDELAZIZ; HAMOUIE, 2008).

Estes métodos podem ser uma boa alternativa para problemas onde algum comportamento da solução é conhecido *a priori* ou no caso de problemas regidos por equações diferenciais com coeficientes não suaves (MELENK; BABUSKA, 1996a; BABUSKA et al., 2004; STROUBOULIS et al., 2001). Dois problemas onde o MEFG se mostrou particularmente eficiente foram o problema da análise de trincas (DUARTE et al., 2001; DUARTE; KIM, 2008; DAUX et al., 2000) e o problema da equação de Helmholtz (STROUBOULIS et al., 2006). Algumas outras aplicações do MEFG e do MPU são a modelagem de domínios que apresentem furos (STROUBOULIS et al., 2000b), análise não linear de estruturas (BARROS, 2002), estruturas em casca de revolução (MANGINI, 2006), a análise dinâmica (DE BEL et al., 2005; HAZARD; BOUILLARD, 2007; ARNDT, 2009; ARNDT et al., 2010) e a modelagem de materiais (BELYTSCHKO et al., 2009).

A aplicação do MEFG, do MPU e do MEFE para problemas da análise dinâmica foi apresentada por Arndt (2009), Arndt et al. (2010), Torii e Machado (2012), Hazard e Bouillard (2007), Elguedj et al. (2009), Gravouil et al. (2009), Rozycki et al. (2008) e De Bel et al. (2005).

Arndt (2009) e Arndt et al. (2010) aplicaram o método para a análise modal de estruturas de barras e vigas de Euler-Bernoulli e concluíram que o método é capaz de obter resultados melhores que o MEF e o MC na maioria dos casos. Além disso, Arndt

(2009) e Arndt et al. (2010) propuseram um esquema iterativo que possibilita a avaliação de modos de vibração específicos da estrutura com grande precisão. Por fim, Arndt (2009) realizou um extensivo estudo das taxas de convergência para a aproximação das frequências naturais de vibração, demonstrando que o MEFG possui convergência mais acelerado do que o MEF polinomial de ordem equivalente para as frequências de vibração mais elevadas.

Torii e Machado (2012) aplicaram a formulação proposta por Arndt (2009) e Arndt et al. (2010) para a análise para resposta no tempo de barras e treliças. Os resultados indicam que o MEFG é capaz de obter resultados mais precisos do que o MEF polinomial nos casos onde a participação dos modos com frequências de vibração elevadas sejam importantes para a análise.

O agrupamento da matriz de massa no contexto do MEFE foi discutido em detalhes por Elguedj et al. (2009). No trabalho de Elguedj et al. (2009) foi proposta uma abordagem de agrupamento de massa que permite que passos maiores de tempo sejam utilizados, reduzindo assim o esforço computacional necessário. Esta abordagem foi então utilizada por Gravouil et al. (2009) para propor esquemas explícitos de análise dinâmica cuja estabilidade é dependente de condições clássicas válidas para o MEF padrão. A abordagem resultante proposta por Elguedj et al. (2009) e Gravouil et al. (2009) permite a redução do número de passos de tempo utilizados mantendo um alto grau de precisão, como demonstrado em exemplos relativos à propagação de trincas.

De Bel et al. (2005) apresentaram a aplicação do MPU ao problema da análise dinâmica de placas finas. Neste caso, as funções de base são tomadas como funções trigonométricas que visam reproduzir os modos de vibração de cada elemento. De Bel et al. (2005) propuseram então um algoritmo para melhorar as funções de base iterativamente. Porém, este algoritmo necessita de procedimentos especiais para avaliar os dados necessários, como a utilização de Transformadas Rápidas de Fourier (MEIROVITCH, 1975), o que pode dificultar a sua aplicação a uma gama maior de problemas. Além disso, De Bel et al. (2005) não abordam o problema do ponto de vista da análise para resposta no tempo. Por fim, De Bel et al. (2005) fazem uso de um método de penalização (CAREY; ODEN, 1983; LIU, 2003) para aplicar as condições de contorno do problema, uma vez que as funções obtidas do MPU interferem nos graus de liberdade nodais.

Hazard e Bouillard (2007) propuseram uma aplicação do MPU ao problema da vibração de placas espessas do tipo sanduíche com camadas viscoelásticas, tomando polinômios como funções de base. Os resultados mostraram-se mais precisos que os obtidos com pacotes de análises comerciais que utilizam uma formulação clássica do problema. Deve-se salientar que a formulação de Hazard e Bouillard (2007) utiliza

funções de base polinomiais com o intuito de enriquecer o espaço de aproximação, mas sem considerar que as funções de base devam representar os modos de vibração locais dos elementos. Além disso, as funções de enriquecimento interferem nos graus de liberdade nodais, o que requer a aplicação de um método de penalização para a aplicação das condições de contorno (HAZARD; BOUILLARD, 2007). Por fim, Hazard e Bouillard (2007) apresentaram exemplos onde diversas características dinâmicas são obtidas, como os modos de vibração, mas não abordaram a análise dinâmica para resposta no tempo.

Uma aplicação do MEFE ao problema da análise dinâmica explícita para resposta no tempo foi apresentado por Rozycki et al. (2008). Segundo Rozycki et al. (2008), domínios complexos podem necessitar de elementos finitos muito pequenos para serem representados adequadamente. Porém, a utilização de elementos finitos muito pequenos implica na utilização de passos de tempo pequenos para que as propriedades de acurácia e estabilidade sejam mantidas (ROZYCKI et al., 2008). Assim, para reduzir a necessidade da utilização de elementos finitos de dimensão reduzida na modelagem de domínios complexos, Rozycki et al. (2008) utilizaram o MEFE para construir elementos finitos que possuam vazios, o que reduz a necessidade da conformidade da malha utilizada com o domínio. Segundo Rozycki et al. (2008) os resultados obtidos são comparáveis àqueles obtidos pela formulação tradicional do MEF. Deve-se salientar que o MEFE como utilizado por Rozycki et al. (2008) visa modelar os vazios dos elementos sem buscar enriquecer o espaço de aproximação.

Outros trabalhos importantes relacionados ao MPU e ao MEFG foram apresentados por Taylor et al. (1998), Strouboulis et al. (2006), Babuska et al. (2002) e Babuska e Banerjee (2012). Taylor et al. (1998) apresentaram uma formulação do MEFH utilizando o MPU com funções de base polinomiais. Strouboulis et al. (2006) apresentaram estimadores de erros *a posteriori* que podem ser aplicados ao MEFG. Babuska et al. (2002) apresentaram uma discussão detalhada sobre a seleção das funções de forma para o MEFG. Por fim, Babuska e Banerjee (2012) apresentaram uma modificação do MEFG que possibilita um melhor condicionamento do sistema de equações.

### 3 FUNDAMENTOS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O MEF pode ser utilizado para se obter soluções aproximadas para problemas de valores de contorno (PVC). Porém, soluções aproximadas são obtidas reescrevendo-se o PVC como um problema de valores de contorno variacional (PVCV), também denominado de forma fraca do PVC.

No MEF, em sua forma mais tradicional, o Método de Galerkin é utilizado para se resolver o PVCV de forma aproximada. As funções utilizadas para construir a aproximação são obtidas encaixando-se funções construídas localmente dentro de subdomínios do problema, denominados elementos finitos.

Neste capítulo são apresentados primeiramente os conceitos básicos referentes a PVCs e PVCVs. Posteriormente é apresentado o Método de Galerkin e suas propriedades básicas. Por fim, o procedimento utilizado no MEF para construir as funções de aproximação é apresentado. Estes conceitos são importantes para este trabalho pois constituem a base do MEFG e do MPU descritos mais adiante.

#### 3.1 PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO

Considere o seguinte PVC:

$$\left\{ \begin{array}{l} Au = f \text{ em } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ B_0 u = g_0 \text{ em } \partial\Omega_1 \\ B_1 u = g_1 \text{ em } \partial\Omega_2 \\ \dots \\ B_{m-1} u = g_{m-1} \text{ em } \partial\Omega_m \end{array} \right. , \quad (3.1)$$

onde  $u$  é a solução do problema,  $A$  é um operador diferencial linear elíptico de ordem  $2m$ ;  $B_0, B_1, B_{m-1}$  são operadores diferenciais de ordem  $0, 1, m-1$  que constituem um conjunto de condições de contorno normais que cobrem  $A$ ;  $\Omega$  é um domínio limitado no qual o problema é definido e o contorno do problema é suave e definido por  $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \dots \cup \partial\Omega_m$  (REDDY, 1998; CAREY; ODEN, 1983).

As condições para que uma solução  $u$  que satisfaça o problema definido pela equação (3.1) exista e seja única são apresentadas por Reddy (1998). Reddy (1998) também demonstra que quando  $f \in H^s(\Omega)$  então  $u \in H^{s+2m}(\Omega)$ , onde  $H^m$  é o espaço de Sobolev das funções com derivadas de ordem até  $m$  que sejam quadraticamente integráveis no sentido de Lebesgue (KREYSZIG, 1978; REDDY, 1998; ODEN; CAREY, 1983).

Este resultado indica o tipo de regularidade que se deve esperar da solução do problema, ou seja, em qual espaço de funções a solução do problema se encontra. Porém, os espaços de Sobolev  $H^m$  são espaços de dimensão infinita (KREYSZIG, 1978; REDDY, 1998; ODEN; CAREY, 1983) o que torna a busca de uma solução analítica  $u$  para o problema da equação (3.1) bastante trabalhosa, e em certos casos, impossível. É justamente neste contexto que a proposta do MEF torna-se evidente, ao substituir o espaço onde a solução do problema se encontra por um subespaço de aproximação de dimensão finita. Porém, antes de apresentar o conceito básico do MEF é necessário reescrever o problema da equação (3.1) na forma de um PVCV, como mostrado a seguir.

### 3.2 PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO VARIACIONAL

Antes de reescrever o problema dado pela equação (3.1) em uma forma mais conveniente é necessário apresentar as seguintes definições (REDDY, 1998):

**Definição 3.1** (Condições de contorno). Sendo  $2m$  a ordem do operador diferencial do PVC, então:

- i. Condições de contorno essenciais, ou de Dirichlet, são aquelas de ordem  $< m$ .
- ii. Condições de contorno naturais, ou de Neumann, são aquelas de ordem  $\geq m$ .

O primeiro passo para escrever o PVCV é escolher um espaço  $V$  no qual a solução será buscada. Este espaço é chamado de espaço de funções admissíveis, e é definido como (REDDY, 1998):

$$V = \{v \in H^m(\Omega) : v \text{ satisfaz todas as condições de contorno essenciais}\}. \quad (3.2)$$

A forma como o PVCV para um dado PVC é obtido pode ter conotações de cunho estritamente matemático ou ser baseado em hipóteses físicas. Porém, um procedimento matemático geral apresentado por Reddy (1998) é aquele de multiplicar a equação diferencial do PVC por uma função arbitrária  $v \in V$ , realizar a integração no domínio e então aplicar a integração por partes (DUFFY, 1998) para simplificar a expressão. Seguindo-se este procedimento é possível obter o seguinte PVCV:

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V, \quad (3.3)$$

onde  $a(\bullet, \bullet)$  é uma forma bilinear e  $l(\bullet)$  é um funcional linear. As formas gerais de  $a(\bullet, \bullet)$  e  $l(\bullet)$  para um dado operador diferencial  $A$  são apresentadas por Reddy (1998).

Uma solução  $u$  que satisfaça o PVC dado pela equação (3.1) irá também satisfazer o PVCV dado pela equação (3.3), já que este último é obtido diretamente do PVC original. Além disso, uma solução  $u \in V$  que satisfaça o PVCV irá também satisfazer o PVC original, mas possivelmente de forma fraca (REDDY, 1998; ODEN; CAREY, 1983). Condições para a existência e unicidade da solução do PVCV são apresentados por Reddy (1998) e Oden e Carey (1983).

A equivalência dos problemas dados pela equação (3.1) e pela equação (3.3) indica que é possível utilizar o PVCV para se obter uma solução que satisfaça o PVC de forma fraca, mas a vantagem desta abordagem não é evidente por enquanto. Porém, métodos de solução aproximados bastante gerais podem ser escritos mais facilmente para o PVCV, como mostrado a seguir.

### 3.3 MÉTODO DE GALERKIN

A idéia básica do Método de Galerkin é buscar uma solução aproximada para o PVC da equação (3.1) utilizando a forma variacional, ou forma fraca, dada pela equação (3.3) (REDDY, 1998). Isto é feito substituindo-se o espaço de soluções  $V$  do PVCV da equação (3.3) por um espaço aproximado  $V^h$  com as seguintes propriedades:

$$V^h \subset V, V^h = \text{gera}\{\phi_i\}_{i=1}^N, \quad (3.4)$$

onde  $\phi_i$  são funções conhecidas que formam uma base para  $V^h$ .

Da equação (3.4) nota-se que a solução aproximada será buscada agora no espaço  $V^h$  que tem dimensão finita  $\dim V^h = N$ , ao invés do espaço  $V$  que possui dimensão infinita. O Método de Galerkin buscará então uma solução aproximada  $u_h \in V^h$  que satisfaça

$$a(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V^h, \quad (3.5)$$

onde  $v_h$  é uma função de teste pertencente ao espaço de aproximação.

Note que a equação (3.5) corresponde ao mesmo PVCV da equação (3.3), mas adotando um espaço aproximado  $V^h \subset V$ , funções admissíveis  $v_h \in V^h$  e uma solução aproximada  $u_h$ . Porém, como o espaço  $V^h$  tem como base as funções  $\phi_i$ , é possível escrever

$$u_h = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i \quad \text{e} \quad v_h = \sum_{j=1}^N d_j \phi_j. \quad (3.6)$$

Substituindo agora a equação (3.6) na equação (3.5) e considerando a linearidade de  $a(\bullet, \bullet)$  e  $l(\bullet)$  obtém-se

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i d_j a(\phi_i, \phi_j) = \sum_{j=1}^N d_j l(\phi_j), \quad (3.7)$$

que pode ser reescrita como

$$\sum_{j=1}^N d_j \left( \sum_{i=1}^N K_{ij} c_i - F_j \right) = 0, \quad (3.8)$$

onde

$$K_{ij} = a(\phi_i, \phi_j) \quad \text{e} \quad F_j = l(\phi_j). \quad (3.9)$$

Como os coeficientes  $d_j$  são arbitrários, pois  $v_h$  pode ser escolhido arbitrariamente, então a equação (3.8) é atendida apenas quando o termo entre parênteses valer zero. O problema então se reduz à solução do sistema de equações lineares

$$\sum_{i=1}^N K_{ij} c_i - F_j = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.10)$$

ou mais concisamente

$$\mathbf{K}\mathbf{c} = \mathbf{F}. \quad (3.11)$$

Os coeficientes  $c_i$  são então obtidos resolvendo-se o sistema de equações lineares dado pela equação (3.11) e a solução aproximada é obtida substituindo-se estes coeficientes na equação (3.6).

Tanto  $\mathbf{K}$  quanto  $\mathbf{F}$  podem ser avaliados pois  $a(\bullet, \bullet)$ ,  $l(\bullet)$  e  $\phi_i$  são conhecidos. Além disso,  $a(\bullet, \bullet)$  e  $l(\bullet)$  são características inerentes ao problema sendo resolvido, enquanto as funções  $\phi_i$  devem ser escolhidas apropriadamente. A construção adequada das funções  $\phi_i$  é justamente o papel do MEF, descrito mais adiante. Porém, antes de proceder à descrição do MEF é interessante abordar a questão da qualidade das aproximações obtidas com o Método de Galerkin.

### 3.3.1 Propriedades do Método de Galerkin

A questão da existência e unicidade de uma solução aproximada utilizando-se o Método de Galerkin é abordada por Reddy (1998) e Oden e Carey (1983). Porém, para que se possa analisar esta questão em maiores detalhes é necessário apresentar o seguinte resultado, apresentado por Oden e Carey (1983).

**Teorema 3.1** (O Teorema de Lax-Milgram Generalizado). Sejam  $H$  e  $G$  espaços de Hilbert reais e seja  $a(\bullet, \bullet)$  uma forma bilinear definida em  $H \times G$  com as seguintes propriedades:

- i.  $a(\bullet, \bullet)$  é contínua, ou seja, existe uma constante  $M > 0$  tal que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_H \|v\|_G, \forall u \in H, \forall v \in G, \quad (3.12)$$

onde  $\|\bullet\|_H$  e  $\|\bullet\|_G$  são normas definidas em  $H$  e  $G$  respectivamente.

- ii.  $a(\bullet, \bullet)$  é coercivo no sentido que existe uma constante  $\alpha$  tal que

$$\inf_{\substack{u \in H \\ \|u\|_H=1}} \sup_{\substack{v \in G \\ \|v\|_G \leq 1}} |a(u, v)| \geq \alpha > 0, \quad (3.13)$$

- iii. Para todo  $v \neq 0$  pertencente a  $G$

$$\sup_{u \in H} |a(u, v)| > 0. \quad (3.14)$$

Então existe um único  $u^* \in H$  tal que

$$a(u^*, v) = l(v) \quad \forall v \in G \quad (3.15)$$

onde  $l(\bullet) \in G'$ . Além disso

$$\|u^*\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|l\|_{G'}. \quad (3.16)$$

O Teorema 3.1 apresenta as condições para que um problema tenha solução única e, portanto, possua solução. Neste teorema,  $G'$  é o espaço dual de  $G$  definido pelos funcionais lineares que atuam em  $G$ . Além disso, a equação (3.16) indica que pequenas modificações no funcional  $l(\bullet)$  devem resultar em pequenas modificações na solução. Assim, a solução depende continuamente de  $l(\bullet)$ .

Para o caso em que  $H = G$  e que  $a(\bullet, \bullet)$  seja simétrica, as condições da equação (3.13) e da equação (3.14) podem ser substituídas por: existe  $\alpha > 0$  tal que



$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2 \quad \forall u \in H, \quad (3.17)$$

e tem-se o Teorema de Lax-Milgram original. Neste caso a forma bilinear  $a(\bullet, \bullet)$  é dita  $H$ -elíptica ou  $H$ -coerciva. Do ponto de vista informal a condição da equação (3.17) garante que a forma bilinear  $a(\bullet, \bullet)$  seja equivalente a um operador "positivo definido".

Para o caso do Método de Galerkin tem-se  $H = G = V^h$ , com  $u_h \in V^h$  e  $v_h \in V^h$ . O problema então terá solução única  $u_h^*$  se  $a(\bullet, \bullet)$  respeitar as condições do Teorema 3.1, considerando  $H = G = V^h$ . Ou seja, o problema resolvido pelo Método de Galerkin terá solução única caso a forma bilinear  $a(\bullet, \bullet)$  seja simétrica, contínua e coerciva.

Uma interpretação bastante interessante do Método de Galerkin pode ser obtida fazendo  $v = v_h$  na equação (3.3) e subtraindo da equação (3.5). Note que é possível realizar esta operação, uma vez que  $V^h \subset V$  e, portanto,  $v_h \in V$ . Esta operação resulta em

$$a(u_h, v_h) - a(u, v_h) = 0 \quad (3.18)$$

e, portanto,

$$a(u_h - u, v_h) = 0. \quad (3.19)$$

Definindo-se o erro da solução aproximada como

$$e = u_h - u, \quad (3.20)$$

a equação (3.19) pode ser reescrita como

$$a(e, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V^h. \quad (3.21)$$

A equação (3.21) mostra que o erro da solução aproximada é ortogonal a qualquer elemento  $v_h$  do espaço de solução aproximado  $V^h$ , de acordo com o produto interno definido por  $a(\bullet, \bullet)$ . Este resultado pode ser estudado de forma mais detalhada no contexto do seguinte teorema e dos seguintes lemas (KREYSZIG, 1978):

**Lema 3.1** (Convexidade). Todo espaço de Hilbert é estritamente convexo.

**Teorema 3.2** (Vetor minimizador). Seja  $X$  um espaço completo com produto interno e  $M \neq \emptyset$  um subconjunto convexo e completo (na norma induzida pelo produto interno). Então, para todo  $x \in X$  existe um único  $y \in M$  tal que

$$\delta = \inf_{\bar{y} \in M} \|x - \bar{y}\| = \|x - y\|. \quad (3.22)$$

**Lema 3.2** (Ortogonalidade). No Teorema 3.2, seja  $M$  um subespaço completo  $Y$  e  $x \in X$  fixo. Então  $z = x - y$  é ortogonal a  $Y$ .

O Lema 3.1 indica que todo espaço de Hilbert é estritamente convexo. Além disso, sabe-se que todo espaço de Hilbert é também completo por definição (KREYSZIG, 1978; REDDY, 1998).

Assim, a interpretação do Teorema 3.2 é que sempre existirá um  $y \in M$  que estará mais próximo (de acordo com a norma definida pelo produto interno) de um dado  $x \in X$ , desde que  $M$  seja um espaço de Hilbert. Já o Lema 3.2 mostra que para um dado  $x$  fixo, o  $y \in Y$  que estará mais próximo de  $x$  é aquele para qual a diferença  $z = x - y$  é ortogonal a todos os elementos de  $Y$ .

O erro como definido na equação (3.20) é justamente da forma  $z = x - y$  que aparece no Lema 3.2. Além disso, a equação (3.19) e a equação (3.21) mostram que esta diferença é ortogonal a todos os elementos de  $V^h$ . Portanto, a solução aproximada  $u_h$  é na verdade o elemento de  $V^h$  mais próximo da solução analítica, de acordo com o produto interno definido por  $a(\bullet, \bullet)$ . Não se pode obter outro  $v_h \in V^h$  que esteja mais próximo de  $u$  e, portanto, a solução de Galerkin é muitas vezes chamada de melhor aproximação do problema (ODEN; CAREY, 1983). Resumidamente, a solução aproximada  $u_h$  é o mais próximo possível que se pode chegar da solução do problema original  $u$  utilizando-se funções pertencentes ao espaço aproximado  $V^h$ .

Este resultado ilustra que o Método de Galerkin será capaz de buscar a melhor solução que se pode obter com  $V^h \subset V$ , em relação à norma dada pela forma bilinear  $a(\bullet, \bullet)$ . O problema então se reduz à garantir que as funções  $\phi_i$  que formam a base de  $V^h$  sejam capazes de reproduzir adequadamente a solução analítica  $u$ . Esta questão pode ser estudada mais detalhadamente ao se apresentar o seguinte teorema, demonstrado por Oden e Carey (1983) e atribuído a Babuska e Aziz (1972):

**Teorema 3.3** (O Teorema da Aproximação). Sejam as condições do Teorema 3.1 respeitadas para  $H = G = V^h$ . Então, o erro  $e$  da aproximação obtida com a equação (3.5), do problema definido pela equação (3.3), satisfaz

$$\|e\|_V \leq \left(1 + \frac{M}{\alpha_h}\right) \|u^* - u_h\|_V, \quad \forall u_h \in V^h, \quad (3.23)$$

onde  $u^*$  é a solução do problema e  $M$  e  $\alpha_h$  são constantes.

De acordo com o Teorema 3.3, o erro da solução aproximada é limitado pelo termo  $\|u^* - u_h\|_V$  que depende de quão bem os elementos de  $V^h$  podem aproximar os elementos

de  $V$ . Ou seja, a não ser pelas constantes que aparecem na equação (3.23), o problema de quão boa é a solução aproximada depende basicamente de quão bem  $V^h$  pode reproduzir  $V$ .

Um resultado bastante semelhante ao Teorema 3.3 é apresentado por Reddy (1998). Neste caso, é importante definir  $h = 1/N$ , onde  $N = \dim V^h$ . Pode-se então apresentar o seguinte resultado:

**Lema 3.3** (O Lema de Céa). Seja  $V$  um subespaço fechado de um espaço de Hilbert, e sejam  $a$  e  $l$ , respectivamente, uma forma bilinear  $V$ -Elíptica e um funcional linear em  $V$ . Então, existe uma constante  $C$ , independente de  $h$ , tal que

$$\|u^* - u_h\|_V \leq C \inf_{v_h \in V^h} \|u^* - v_h\|_V. \quad (3.24)$$

Consequentemente, uma condição suficiente para a aproximação de Galerkin  $u_h$  convergir para a solução  $u^*$  do problema é que exista uma família  $\{V^h\}$  de subespaços tal que

$$\inf_{v_h \in V^h} \|u^* - v_h\|_V \rightarrow 0 \text{ para } h \rightarrow 0. \quad (3.25)$$

O Lema 3.3 tem as mesmas implicações do Teorema 3.3, ou seja, indica que as soluções aproximadas serão melhores quanto melhor o espaço aproximado  $V^h$  puder representar  $u^*$ . Porém, o Lema 3.3 vai mais além e afirma que é possível melhorar indefinidamente a solução aproximada caso se esteja lidando com espaços aproximados  $V^h$  escolhidos apropriadamente, de forma a respeitar a equação (3.25).

A seguir será mostrado que o MEF é um método para montar espaços  $V^h$  através de procedimentos padronizados, apropriados para garantir a convergência da solução aproximada.

### 3.4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método de Galerkin é uma poderosa ferramenta para se obter uma solução aproximada para um PVC através da forma fraca dada pelo PVCV. Porém, segundo a equação (3.2), as funções teste devem ser escolhidas de forma a respeitar as condições de contorno essenciais homogêneas do problema. Assim, as funções  $u_h$  e  $v_h$  da equação (3.6) utilizadas no Método de Galerkin devem satisfazer as condições essenciais do problema. Como estas funções são combinações lineares das funções de base  $\phi_i$  do espaço aproximado  $V^h$ , a única forma de garantir que todas as funções  $v_h \in V^h$  sempre satisfaçam as condições essenciais do problema é garantindo que cada uma das funções base  $\phi_i$  satisfaçam estas condições.

Para problemas sujeitos a condições de contorno essenciais bastante simples e compostos de domínios de geometria simples, é possível gerar funções de base que respeitem as condições de contorno essenciais do PVC por inspeção e, portanto, aplicar o Método de Galerkin diretamente.

Porém, em muitos problemas de interesse prático, que possuam geometrias complexas, torna-se bastante difícil gerar funções de base com tal característica. Nestes casos é interessante fazer uso do MEF, pois este propõe uma metodologia padrão de construção de espaços aproximados  $V^h$  que respeitem as condições de contorno essenciais e que possuam características de aproximação adequadas.

Esta metodologia é baseada em dividir o domínio do problema em um número finito de subdomínios (elementos finitos) e gerar aproximações locais. A união destas aproximações locais resultará então na aproximação global do problema. Porém, lidar com elementos finitos significa lidar com subdomínios de geometria simples e, portanto, pode-se gerar aproximações locais que respeitem as condições de contorno essenciais de forma simples.

Nas formulações mais tradicionais do MEF, as funções de aproximação utilizadas são polinômios. Este fato deve-se principalmente à facilidade de gerar polinômios que respeitem as condições de contorno essenciais do problema, à facilidade em realizar operações com polinômios (como integração, por exemplo) e à teoria de aproximação que existe para polinômios. Em particular, um resultado muito importante que respalda o uso de polinômios como funções de aproximação é o seguinte teorema (KREYSZIG, 1978):

**Teorema 3.4** (Teorema da Aproximação de Weierstrass para Polinômios). O conjunto  $W$  de todos os polinômios com coeficientes reais é denso no espaço real  $C[a, b]$ . Portanto, para todo  $x \in C[a, b]$  e um dado  $\epsilon > 0$  existe um polinômio  $p$  tal que  $|x(t) - p(t)| < \epsilon$  para todo  $t \in [a, b]$ .

Uma forma alternativa ao Teorema 3.4 é proposta por Byron e Fuller (1992):

**Corolário 3.1.** Se  $f(x)$  é uma função contínua no intervalo fechado  $[a, b]$ , então existe uma sequência de polinômios  $P_n(x)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x)$  uniformemente em  $[a, b]$ .

O Teorema 3.4 e o Corolário 3.1 indicam que é possível aproximar qualquer função contínua arbitrariamente bem através de polinômios. Portanto, é de se esperar que a solução do problema possa ser também aproximada por polinômios, mesmo que esta não seja um polinômio.

Resultados semelhantes ao Teorema 3.4 podem ser obtidos para funções trigonométricas, como os teoremas que garantem a convergência da série de Fourier para funções contínuas (KREYSZIG, 1978; BYRON; FULLER, 1992). Porém, a escolha de funções

trigonométricas que satisfaçam as condições de contorno essenciais do problema não é simples na maioria dos casos. Neste contexto, tanto polinômios quanto funções trigonométricas são capazes de representar arbitrariamente bem uma função contínua qualquer. Porém, é mais fácil escolher polinômios que satisfaçam as condições de contorno essenciais do problema e, portanto, estes têm sido utilizados mais frequentemente para a formulação do MEF.

De fato, Ciarlet (1978) afirma que a utilização de polinômios é fator chave para todos os resultados de convergência sobre o MEF, definindo assim uma necessidade matemática da utilização destas funções como bases para os espaços de elementos finitos. Apesar da evolução de diversos conceitos relacionados ao MEF, nota-se, da literatura, que grande parte dos resultados relacionados à convergência e estimadores de erros para o MEF são válidos somente no contexto de aproximações polinomiais.

### 3.4.1 Propriedades gerais do Método dos Elementos Finitos

Diversos textos apresentam detalhes da aplicação prática do MEF (BECKER et al., 1981; BATHE, 1996; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000). Porém, a abordagem utilizada aqui é aquela apresentada por Oden e Carey (1983). Esta abordagem faz uma descrição do MEF mais geral do ponto de vista matemático e é bastante semelhante às abordagens apresentadas por Solín et al. (2004) e Ciarlet (1978). Uma abordagem ligeiramente diversa é apresentada por Reddy (1998), porém, com as mesmas implicações matemáticas. A seguir é apresentada a definição formal do MEF como descrito por Oden e Carey (1983).

Considere um domínio aberto e limitado  $\Omega \subset R^n$  com contorno Lipschitziano  $\partial\Omega$  (REDDY, 1998). Seja  $u \in C^m$ ,  $m \geq 0$ ; ou seja,  $u$  é uma função com  $m$  derivadas contínuas definida no fechamento  $\overline{\Omega}$  de  $\Omega$  (REDDY, 1998), sendo que no contexto deste trabalho o fechamento de  $\Omega$  é dado por  $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ . A construção de um interpolador de  $u$  pode ser feita através do procedimento descrito a seguir.

### 3.4.2 Particionamento de $\overline{\Omega}$

Constrói-se uma partição  $Q_h$  de  $\overline{\Omega}$  subdividindo-se  $\overline{\Omega}$  em um número finito  $E$  de subdomínios  $\overline{\Omega}_e \in Q_h$  chamados elementos finitos de forma que:

- i. Todo elemento  $\overline{\Omega}_e$  seja fechado e consista de um interior não vazio  $\Omega_e$  e um contorno Lipschitziano  $\partial\Omega_e$ .
- ii. Os elementos finitos cobrem  $\overline{\Omega}$ , ou seja,  $\overline{\Omega} = \bigcup_{e=1}^E \overline{\Omega}_e$ .

- iii. Os elementos finitos não se sobrepõem, ou seja,  $\Omega_e \cap \Omega_f = \emptyset$  para quaisquer elementos distintos  $\overline{\Omega}_e, \overline{\Omega}_f \in Q_h$ .

### 3.4.3 Interpolação local

Para cada  $\overline{\Omega}_e \in Q_h$  é introduzido um espaço de dimensão finita  $P_e$  gerado por funções de interpolação locais linearmente independentes  $\{\psi_i\}_{i=1}^{N_e}$  de pontos  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Localmente a restrição  $u|_{\overline{\Omega}_e}$  de  $u \in C^m(\overline{\Omega})$  é aproximada pela combinação linear da forma

$$u_h^e(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_e} a_i^e \psi_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \overline{\Omega}_e \quad (3.26)$$

onde  $u_h^e$  é a solução aproximada dentro de um elemento finito.

Os coeficientes  $a_i^e$  são usualmente tomados como os valores de  $u$  e os valores de derivadas parciais de  $u$  em uma coleção pré designada de pontos  $\{\mathbf{b}_i^e\}_{i=1}^{m_e}$  dentro de  $\overline{\Omega}_e$ . Os pontos  $\{\mathbf{b}_i^e\}_{i=1}^{m_e}$  são chamados pontos nodais ou nós do elemento  $\overline{\Omega}_e$ .

Os coeficientes  $a_i^e$  são chamados de valores dos graus de liberdade locais do elemento  $\overline{\Omega}_e$ . Como estes valores dependem linearmente e continuamente de  $u$ , o conjunto  $D_e$  de graus de liberdade locais constitui um conjunto de funcionais lineares (REDDY, 1998) em  $C^m(\overline{\Omega}_e)$ .

Em geral demanda-se que, para algum  $k$ ,

$$P_e \supseteq P_k(\overline{\Omega}_e) \quad (3.27)$$

onde  $P_k(\overline{\Omega}_e)$  é o espaço de polinômios de ordem até  $k$  definido em  $\overline{\Omega}_e$ . Ou seja, as funções  $\psi_i$  e os pontos nodais  $\mathbf{b}_i^e$  são selecionados de tal maneira que combinações lineares da forma dada pela equação (3.26) possam ser construídas para coincidir identicamente com qualquer polinômio de ordem até  $k$  em  $\overline{\Omega}_e$ .

### 3.4.4 Montagem

Aproximações globais são obtidas encaixando-se as aproximações locais. As funções de interpolação locais  $\psi_i$  são desenvolvidas de forma que quando os valores  $a_i^e$  são calculados em nós comuns a elementos adjacentes é produzida uma representação global de  $u$ . Em outras palavras, a coleção de elementos  $Q_h$  é montada conectando-se quaisquer elementos adjacentes ao longo de seus contornos comuns; e conectando-se as

funções de interpolação locais de forma a gerar um sistema de  $M$  funções de aproximação globais linearmente independentes  $\{\phi_i\}_{i=1}^M$ .

Globalmente é produzida uma aproximação de  $u \in C^m(\overline{\Omega})$  da forma

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M a_i(u) \phi_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \overline{\Omega} \quad (3.28)$$

onde os coeficientes  $a_i$  são os graus de liberdade globais da aproximação por elementos finitos de  $u$ . Como ocorre para os graus de liberdade locais,  $a_i(u)$  pode ser tomado como valores de  $u$  e suas derivadas parciais em pontos nodais  $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1}^M$  na coleção de elementos  $\overline{\Omega} = \bigcup_{e=1}^E \overline{\Omega}_e$ . Assim, o conjunto  $D$  de graus de liberdade globais consiste de um conjunto de  $M$  funcionais lineares contínuos em  $C^m(\overline{\Omega})$ . Além disso, as funções de interpolação globais possuem suporte compacto, ou seja, valem zero fora dos elementos que contém o seu nó associado.

Como as funções de interpolação são linearmente independentes, elas formam uma base para um subespaço de dimensão finita  $V^h(\Omega) \subset C^m(\overline{\Omega})$ , o qual é chamado de espaço de elementos finitos. Da definição do espaço  $P_e$  de interpoladores locais tem-se que

$$P_e = \{v_h|_{\overline{\Omega}_e} : v_h \in V^h(\Omega)\}, \quad (3.29)$$

ou seja, o espaço de interpolação local  $P_e$  é a restrição do espaço de elementos finitos dentro do elemento.

Escolhendo-se apropriadamente a geometria do elemento, a posição dos nós, os graus de liberdade e as funções de interpolação locais, pode-se construir funções de aproximação globais  $\phi_i$  que possuam derivadas de ordem  $r \geq 0$  contínuas em  $\overline{\Omega}$ . Tem-se então  $V^h(\Omega) \subset C^r(\overline{\Omega})$  e os elementos utilizados para gerar  $V^h(\Omega)$  são chamados de elementos finitos  $C^r$ .

Como as funções de aproximação locais  $\psi_i$  valem zero fora dos elementos aos quais estão associadas, então pode-se escrever a matriz  $\mathbf{K}$  e o vetor  $\mathbf{F}$  da equação (3.11) como

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{K}^e \quad (3.30)$$

e

$$\mathbf{F} = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{F}^e, \quad (3.31)$$

onde

$$K_{ij}^e = a(\psi_i, \psi_j) \quad (3.32)$$

e

$$F_j^e = l(\psi_j). \quad (3.33)$$

Portanto, as matrizes que geram o sistema de equações lineares utilizado para se obter a solução aproximada são obtidas da soma das matrizes dentro de cada elemento. Isto facilita a implementação do MEF, pois permite que a matriz de rigidez utilizada na equação (3.11) seja obtida para um elemento padrão e utilizada repetidamente.

#### 3.4.5 Definição de elemento finito

A definição de elemento finito de acordo com Oden e Carey (1983) é:

**Definição 3.2** (Elemento Finito). Um elemento finito em  $R^n$  é uma tríade  $(G, D, P)$  onde:

- i.  $G$  é um subespaço fechado e não vazio de  $R^n$  com contorno Lipschitziano  $\partial G$ .
- ii.  $D$  é um conjunto finito de funcionais lineares  $l_i$ ,  $1 \leq i \leq N_G$ , definido em  $C^\infty(G)$ , chamados graus de liberdade do elemento.
- iii.  $P$  é um espaço de funções definido em  $G$ ,  $P \subset C^\infty(G)$ , tal que para escalares quaisquer  $\alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq N_G$ , existe um único  $\psi \in P$  tal que

$$l_i(\psi) = \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq N_G, \quad (3.34)$$

onde  $l_i(\bullet)$  é um grau de liberdade.

De acordo com a definição 3.2 um elemento finito é definido por seu domínio, seus graus de liberdade e seu espaço de funções utilizadas para a aproximação. Além disso, a parte (iii) desta mesma definição afirma que quando os valores dos graus de liberdade sejam prescritos isto deve definir um único elemento de  $P$ . Em outras palavras, deve existir um único elemento de  $P$  que possa gerar um dado grupo de valores de graus de liberdade.



Quando esta condição é respeitada o elemento finito é dito  $P$ -unisolvante (ODEN; CAREY, 1983).

Quando  $(G, D, P)$  é um membro da partição  $Q_h$  de um dado domínio, então escreve-se  $G = \Omega_e$  e são designados índices  $e$  para a definição de elemento finito, resultando em  $(\Omega_e, D_e, P_e)$ . Além disso, é comum referir-se a um dado elemento finito  $(\Omega_e, D_e, P_e)$  por  $\Omega_e$ , por conveniência.

Como descrito anteriormente, o MEF pode ser utilizado para se construir um espaço  $V^h$  que é gerado pelas funções  $\phi_i(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ . As funções  $\phi_i$  são geradas da interpolação local dentro de subdomínios  $\bar{\Omega}_e \subset \bar{\Omega}$ , ou seja, são geradas dentro dos elementos finitos. Como os elementos finitos possuem geometrias simples, a interpolação local pode ser feita facilmente e através de um procedimento padrão.

Uma vez que o espaço de elementos finitos  $V^h$  é construído, pode-se utilizá-lo no Método de Galerkin para se obter uma solução aproximada. Neste contexto, o MEF aparece claramente como uma metodologia para se gerar espaços de aproximações, sendo que a solução aproximada é efetivamente obtida da utilização do Método de Galerkin. Outros métodos, que não o Método de Galerkin, podem ser utilizados para se obter a solução aproximada uma vez que o espaço aproximado tenha sido construído. Alguns exemplos de alternativas ao Método de Galerkin são o Método dos Mínimos Quadrados e o Método da Colocação (ODEN; CAREY, 1983).

Existem também outras formas de se obter a forma fraca do PVC. Aqui foi utilizada uma abordagem baseada no problema de valor de contorno variacional e nos conceitos da análise funcional, como apresentada por Reddy (1998) e Oden e Carey (1983). Outros autores, como Bathe (1996) e Zienkiewicz e Taylor (2000) utilizam uma abordagem baseada em conceitos energéticos, no qual um funcional representando a energia do sistema é minimizado. Uma discussão bastante detalhada das diversas abordagens que podem ser utilizadas para se formular o MEF é apresentada por Ciarlet (1978). Neste trabalho optou-se pela abordagem descrita acima por esta ser a abordagem utilizada originalmente no desenvolvimento do MPU (MELENK; BABUSKA, 1996a) e do MEFG (STROUBOULIS et al., 2001).

## 4 FUNDAMENTOS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADO

O MPU foi apresentado originalmente por Melenk e Babuska (1996a) e é a base de muitos métodos utilizados atualmente para a solução de PVC (BABUSKA et al., 2003). Posteriormente, Strouboulis et al. (2001) apresentaram os conceitos do MEFG, que pode ser visto como uma extensão do MPU. No contexto deste trabalho optou-se por denominar como MPU a metodologia de obtenção de funções de aproximação locais a partir de uma PU e funções de base que representem o fenômeno sendo estudado. Já o termo MEFG é reservado para o caso em que as funções obtidas com o MPU são acrescidas daquelas obtidas com o MEF polinomial padrão.

### 4.1 MÉTODO DA PARTIÇÃO DA UNIDADE

O MPU pode ser visto como um método alternativo ao MEF para se gerar espaços de aproximação com propriedades de conformidade e regularidade quaisquer (MELENK; BABUSKA, 1996a, 1996b; BABUSKA; MELENK, 1997). A ideia básica do método está centrada na construção de uma PU, definida como apresentado a seguir para problemas de segunda ordem (MELENK; BABUSKA, 1996a):

**Definição 4.1** (Partição da Unidade). Seja  $\Omega \subset R^n$  um conjunto aberto,  $\{\Omega_i\}$  uma cobertura aberta de  $\Omega$  satisfazendo uma condição de sobreposição ponto a ponto

$$\exists M \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \Omega \quad \text{card}\{i | x \in \Omega_i\} \leq M. \quad (4.1)$$

Seja  $\{\varphi_i\}$  uma partição da unidade Lipschitziana subordinada à cobertura  $\{\Omega_i\}$  satisfazendo

$$\text{suporte}(\varphi_i) \subset \text{fechamento}(\Omega_i) \quad \forall i, \quad (4.2)$$

$$\sum_i \varphi_i \equiv 1 \text{ em } \Omega, \quad (4.3)$$

$$\|\varphi_i\|_{L^\infty(R^n)} \leq C_\infty, \quad (4.4)$$

$$\|\nabla \varphi_i\|_{L^\infty(R^n)} \leq \frac{C_g}{\text{diam } \Omega_i}, \quad (4.5)$$

onde  $C_\infty$  e  $C_g$  são duas constantes. Então  $\{\varphi_i\}$  é chamada uma PU  $(M, C_\infty, C_g)$  subordinada à uma cobertura  $\{\Omega_i\}$ . A PU  $\{\varphi_i\}$  possui grau  $m \in N_0$  se  $\{\varphi_i\} \subset C^m(R^n)$ . Os subdomínios  $\{\Omega_i\}$  são chamados subcoberturas.

Na Definição (4.1) a constante  $M$  da equação (4.1) controla o número de subcoberturas que podem se sobrepor em um mesmo ponto dentro do domínio do problema  $\Omega$  (MELENK; BABUSKA, 1996a). A equação (4.2) indica que as funções  $\varphi_i$  devem ser não nulas apenas dentro da subcobertura às quais estão vinculadas. A equação (4.3) evidencia a característica mais marcante da PU, o fato de que as funções  $\varphi_i$  que a compõem devem resultar na unidade quando somadas. Por fim, a equação (4.4) e a equação (4.5) indicam que as funções  $\varphi_i$  devem ser limitadas e possuir derivadas limitadas.

Em posse da definição de PU, é possível apresentar a definição do espaço de aproximação do MPU (MELENK; BABUSKA, 1996a, 1996b; BABUSKA; MELENK, 1997).

**Definição 4.2** (Espaço MPU). Seja  $\{\Omega_i\}$  uma cobertura aberta de  $\Omega \subset R^n$  e seja  $\{\varphi_i\}$  uma partição da unidade  $(M, C_\infty, C_g)$  subordinada a  $\{\Omega_i\}$ . Seja um dado espaço  $V_i \subset H^1(\Omega_i \cap \Omega)$ . Então o espaço

$$V_{MPU} = \sum_i \varphi_i V_i = \left\{ \sum_i \varphi_i v_i \mid v_i \in V_i \right\} \subset H^1(\Omega) \quad (4.6)$$

é chamado de espaço do MPU. O espaço do MPU possui grau  $m$  se  $V_{MPU} \subset C^m(\Omega)$ . Os espaços  $V_i$  são chamados aqui de espaços de base.

O seguinte Teorema, apresentado por Melenk e Babuska (1996a, 1996b) e Babuska e Melenk (1997), apresenta as propriedades de aproximação de um espaço MPU.

**Teorema 4.1** (Aproximações utilizando o espaço MPU). Seja um dado  $\Omega \subset R^n$ . Sejam  $\{\Omega_i\}$ ,  $\{\varphi_i\}$  e  $\{V_i\}$  como nas definições 4.1 e 4.2. Seja  $u \in H^1(\Omega)$  a função a ser aproximada. Assumindo que os espaços de aproximação locais  $V_i$  tenham as seguintes propriedades: em cada subcobertura  $\Omega_i \cap \Omega$ ,  $u$  pode ser aproximado por uma função  $v_i \in V_i$  tal que

$$\|u - v_i\|_{L^2(\Omega_i \cap \Omega)} \leq \epsilon_1(i), \quad (4.7)$$

$$\|\nabla(u - v_i)\|_{L^2(\Omega_i \cap \Omega)} \leq \epsilon_2(i). \quad (4.8)$$

Então a função

$$u_{ap} = \sum_i \varphi_i v_i \in V \subset H^1(\Omega) \quad (4.9)$$

satisfaz

$$\|u - u_{ap}\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{M} C_\infty \left( \sum_i \epsilon_1^2(i) \right)^{1/2}, \quad (4.10)$$

$$\|\nabla(u - u_{ap})\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2M} \left( \sum_i \left( \frac{C_g}{\text{diam } \Omega_i} \right)^2 \epsilon_1^2(i) + C_\infty^2 \epsilon_2^2(i) \right)^{1/2}. \quad (4.11)$$

O Teorema 4.1 mostra que na verdade o espaço MPU será semelhante aos espaços de base  $V_i$ . Da equação (4.10) pode-se notar que, a não ser por uma constante, a diferença entre a função  $u_{ap}$  e a função original  $u$  será delimitada pelas diferenças individuais das funções  $v_i \in V_i$  utilizadas. O mesmo ocorre para o gradiente da função aproximada, como mostrado na equação (4.11). Consequentemente, é de se esperar que a utilização do espaço MPU seja capaz de obter resultados semelhantes aos resultados que seriam obtidos ao se utilizar o espaço de aproximação local  $V_i$ , desde que  $v_i \in V_i$  sejam boas aproximações para  $u$ .

A vantagem de se utilizar o espaço MPU, porém, é que pode-se utilizar funções  $v_i \in V_i$  não polinomiais que sejam representativas para o fenômeno sendo estudado. Isto permite que uma gama maior de espaços de aproximação locais possam ser utilizados sem alterar as premissas básicas do MEF.

#### 4.1.1 Partição da Unidade dada pelas funções de forma do MEF Lagrangeano

Um exemplo de uma PU são as funções de forma utilizadas no MEF Lagrangeano. Isto pode ser visto ao se analisar estas funções para polinômios de Lagrange de ordem  $k = 1$ , que são mostradas na FIGURA 4.1. Neste caso, cada função de aproximação global  $\phi_i$  é na verdade uma partição da unidade  $\varphi_i$  da Definição 4.1. Pode-se notar que a condição imposta pela equação (4.3) é respeitada, pois realmente a soma de todas as funções  $\phi_i$  resulta na unidade em todo o domínio. Além disso, as condições impostas pela equação (4.4) e pela equação (4.5) também são respeitadas, uma vez que tanto as funções  $\phi_i$  como suas derivadas de primeira ordem são limitadas. Por fim, basta verificar a condição imposta pela equação (4.2) e definir as subcoberturas  $\Omega_i$ .

Da FIGURA 4.1 pode-se notar que cada função  $\phi_i$  é definida dentro de dois elementos finitos adjacentes, a não ser no caso da função  $\phi_1$  e da função  $\phi_{N_e+1}$ . A função

$\phi_2$ , por exemplo, é definida na união do primeiro com o segundo elemento finito da FIGURA 4.1. Portanto, de forma geral, cada subcobertura como apresentada na Definição 4.1 é dada pela união de dois elementos finitos vizinhos. Consequentemente, a PU dada pelas funções lineares do MEF Lagrangeano é como a mostrada na FIGURA 4.1, onde cada elemento finito é definido na interseção de duas subcoberturas  $\{\Omega_i\}$ . O número de subcoberturas que se sobrepõem em cada elemento finito é 2 e, portanto, neste caso tem-se  $M$  como definido na equação (4.1) igual a 2.

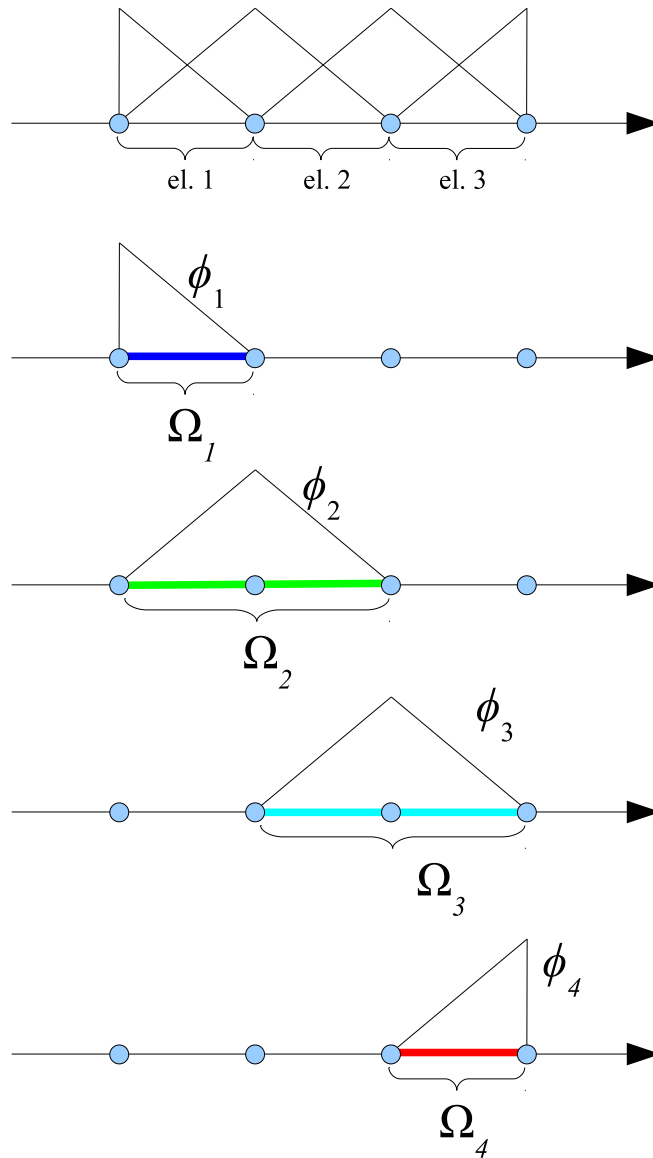


FIGURA 4.1 – PARTIÇÃO DA UNIDADE OBTIDA COM AS FUNÇÕES LINEARES DO MEF LAGRANGEANO.

Da FIGURA 4.1 é possível ver que a PU dada pelas funções lineares do MEF respeita também a equação (4.2). Isso porque o suporte de cada PU  $\varphi_i$  está contido no fechamento de cada subcobertura  $\Omega_i$ , ou seja,  $\varphi_i$  é diferente de zero apenas dentro de  $\Omega_i$ .

É possível também construir uma PU baseada em polinômios de Lagrange de ordem  $k$  maior que 1, mas este procedimento não será utilizado neste trabalho.

#### 4.1.2 Partição da Unidade dada por funções trigonométricas

Uma PU alternativa pode ser construída utilizando-se a seguinte propriedade:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad \forall x \in R, \quad (4.12)$$

ou seja, a soma de funções seno e cosseno elevadas ao quadrado resulta na unidade quando tiverem o mesmo argumento.

Assim, pode-se definir as seguintes funções dentro de um dado elemento finito com coordenadas locais  $\xi = [-1, 1]$

$$\psi_1^e = \cos^2((\xi + 1)\pi/4) \quad (4.13)$$

e

$$\psi_2^e = \sin^2((\xi + 1)\pi/4). \quad (4.14)$$

Estas duas funções são mostradas na FIGURA 4.2. Efetuando-se então o procedimento de montagem verifica-se que as funções globais  $\phi_i(x)$  dadas pelas funções locais da equação (4.13) e equação (4.14) serão como mostradas na FIGURA 4.3. Estas funções globais podem então ser utilizadas como uma PU, sendo que as subcoberturas são novamente definidas, a não ser pelas subcoberturas das extremidades, da união de dois elementos finitos.

A vantagem da PU dada por funções trigonométricas é que esta PU é composta de funções contidas em  $H^\infty(\Omega)$ , ou seja, derivadas de qualquer ordem destas funções são quadraticamente integráveis. Isto implica que todas as funções que compõem a partição da unidade pertençam também ao espaço  $H^\infty(\Omega)$ . Como as funções de aproximação do MPU herdam sua regularidade da PU (MELENK; BABUSKA, 1996a), as funções de aproximação resultantes estarão também contidas em  $H^\infty(\Omega)$ .

Neste trabalho a PU trigonométrica não será utilizada. Porém, no caso de vigas de Euler-Bernoulli será utilizada uma PU dada por polinômios de Hermite, que possui formato final muito semelhante à PU apresentada nesta seção.

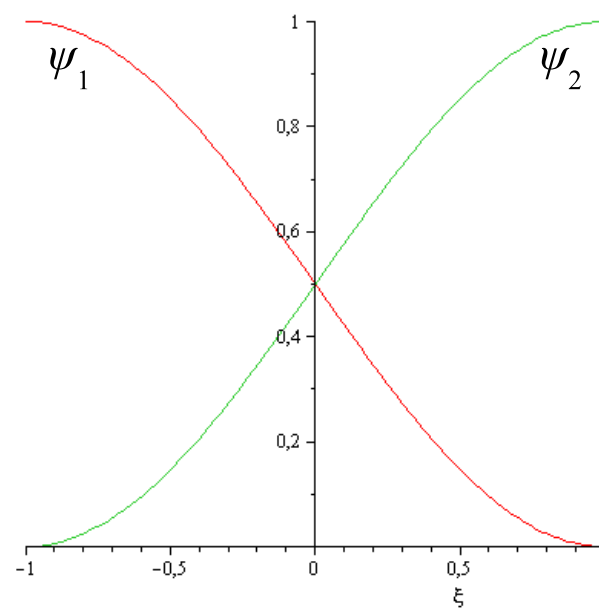


FIGURA 4.2 – FUNÇÕES SENO E COSSENO AO QUADRADO DEFINIDAS DENTRO DE UM ELEMENTO FINITO.

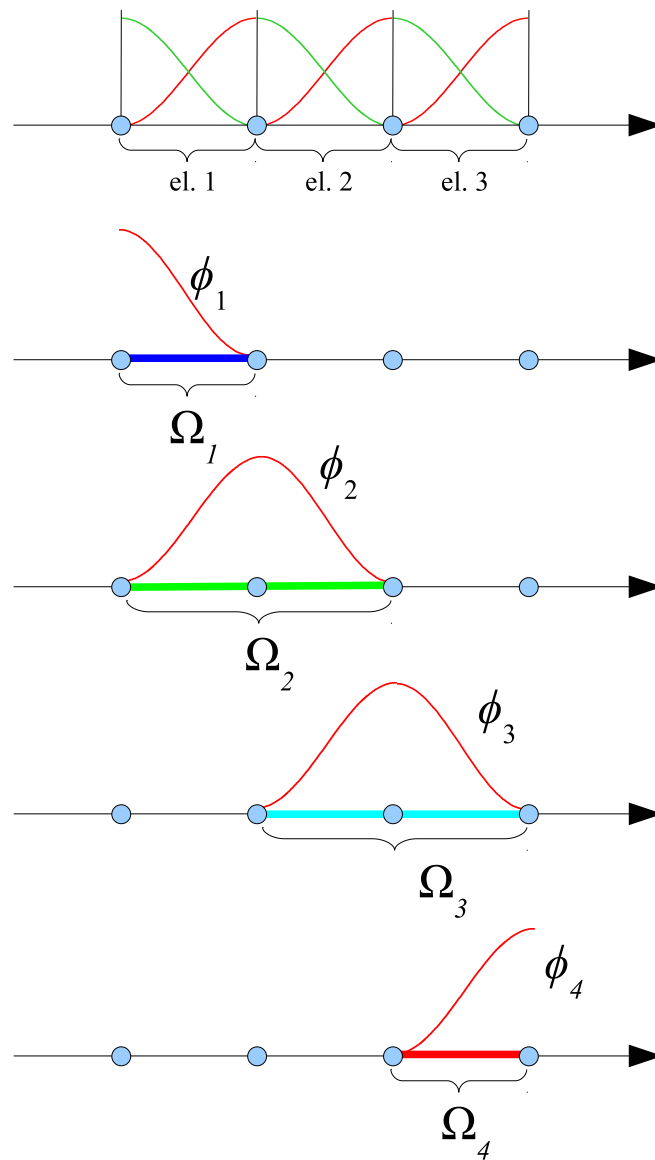


FIGURA 4.3 – PARTIÇÃO DA UNIDADE DADA POR FUNÇÕES SENO E COSSENO AO QUADRADO.



## 5 AVALIAÇÃO DE ERROS PARA RESPOSTA NO TEMPO E CONDICIONAMENTO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES

### 5.1 AVALIAÇÃO DE ERROS PARA RESPOSTA NO TEMPO

Uma forma de se avaliar os erros de soluções aproximadas para problemas da dinâmica é apresentada por Bathe (1996). Neste caso, determina-se a redução de amplitude da vibração e a redução da frequência de vibração da solução aproximada em relação à solução analítica do problema.

Porém, esta abordagem é consistente apenas nos casos em que a solução é dada por uma oscilação harmônica baseada em apenas um modo de vibração. Isto porque uma vibração arbitrária pode ser composta de diversos modos de vibração interagindo ao mesmo tempo, cada um com sua respectiva amplitude e frequência. Neste caso pode não ser possível avaliar o amortecimento e a redução da frequência de vibração de cada modo individualmente. Além disso, esta metodologia requer o conhecimento da solução analítica do problema, que pode ser obtida apenas em alguns casos simplificados.

Portanto, a abordagem utilizada por Bathe (1996) é limitada à avaliação de erros quando a vibração é regida por apenas uma frequência de vibração, sendo aplicada principalmente para a comparação entre diferentes esquemas de integração no tempo para um problema modelo com solução analítica conhecida.

Uma forma alternativa de se avaliar o erro entre uma solução analítica  $u(x, t)$  e uma solução aproximada  $u_h(x, t)$ , para uma dada posição  $x = x_0$  fixa, no intervalo de tempo  $[t_i, t_f]$  foi apresentada por Torii e Machado (2010) e aplicada para o problema em questão. Este erro pode ser definido como

$$e = \int_{t_i}^{t_f} |u(x_0, t) - u_h(x_0, t)| dt, \quad (5.1)$$

onde  $x = x_0$  é tomado como constante pois o erro é avaliado em uma posição fixa do domínio.

Caso seja necessário avaliar o erro em todo o domínio, e não apenas em uma posição fixa  $x = x_0$ , pode-se integrar a equação (5.1) dentro de todo o domínio. Porém, esta abordagem não será utilizada neste trabalho devido às dificuldades computacionais envolvidas na avaliação desta integral.

A equação (5.1) poderia ser utilizada para avaliar o erro da solução aproximada quando a solução analítica fosse conhecida. Porém, a avaliação desta integral não é

eficiente uma vez que na prática os valores da solução aproximada são dados como valores discretos no tempo.

Uma forma eficiente de se avaliar o erro da solução numérica é utilizar a seguinte aproximação para a integral da equação (5.1)

$$e \approx \sum_{i=1}^n \Delta t |\Delta u^{(i)}| = \sum_{i=1}^n \Delta t |u^{(i)} - u_h^{(i)}|, \quad (5.2)$$

onde  $n$  é o número de passos de tempo utilizados,  $u^{(i)}$  é a solução analítica no passo de tempo  $(i)$  para  $x = x_0$ ,  $u_h^{(i)}$  é a solução aproximada no passo de tempo  $(i)$  para  $x = x_0$  e  $\Delta t$  é o passo de tempo utilizado.

O estimador de erro da equação (5.2) é ilustrado na FIGURA 5.1. A integral da equação (5.1) para um dado intervalo de tempo  $[t^{(i-1)}, t^{(i)}]$  é aproximada pelo produto entre  $\Delta t$  e  $\Delta u^{(i)}$ . Este estimador de erro pode ser avaliado eficientemente uma vez que utiliza apenas valores discretos no tempo e, portanto, o esforço computacional envolvido é pequeno.

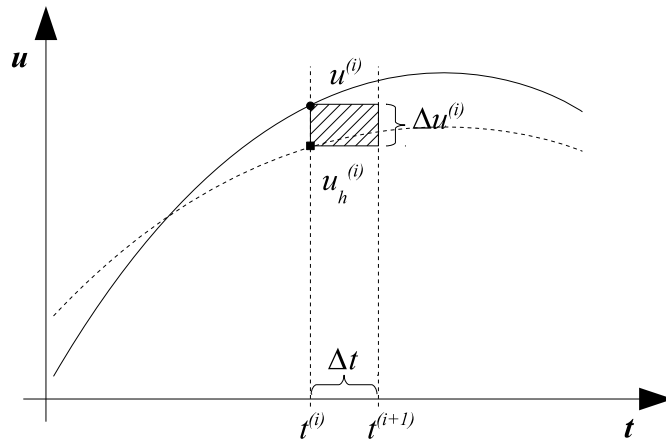


FIGURA 5.1 – ESTIMATIVA DE ERRO DE ACORDO COM A EQUAÇÃO (5.2).

Uma generalização da equação (5.1) pode ser escrita utilizando-se o produto interno entre duas funções (KREYSZIG, 1978; REDDY, 1998), o que resulta em

$$e(u, u_h) = (u - u_h, \phi)_{L^p} = \left| \int_{t_i}^{t_f} |u - u_h|^p |\phi|^p dt \right|^{\frac{1}{p}}, \quad (5.3)$$

onde  $u$  e  $u_h$  são funções de  $t$  para um dado  $x = x_0$  e  $\phi$  é uma função de ponderação. Ou seja, o erro pode ser avaliado tomando-se o produto interno entre a diferença da solução analítica e a solução aproximada com uma função de ponderação  $\phi$ .

A equação (5.1) é um caso particular da equação (5.3) assumindo  $p = 1$  e  $\phi = 1$ .

Porém, a equação (5.3) pode levar a outros estimadores de erros bastante úteis. Para verificar este fato, suponha que a função de ponderação  $\phi$  seja tomada como a solução analítica  $u$ . Neste caso a diferença entre a solução analítica e a solução aproximada  $|u - u_h|$  da equação (5.3) é multiplicada pela própria solução analítica, o que resulta em

$$e(u, u_h) = (u - u_h, u)_{L^p} = \left| \int_{t_i}^{t_f} |u - u_h|^p |u|^p dt \right|^{\frac{1}{p}}. \quad (5.4)$$

Da equação (5.4) nota-se que a diferença  $u - u_h$  contribuirá mais para o erro quanto maior for  $|u|$ . Ou seja, a equação (5.4) pode ser utilizada para se comparar a capacidade de diferentes métodos em reproduzir picos de deslocamentos.

Quando  $p = 1$ , pequenas e grandes diferenças  $\Delta u$  terão a mesma importância para o estimador de erro. Porém, quando  $p$  é aumentado, maiores diferenças  $\Delta u$  prevalecerão sobre menores diferenças. Ou seja,  $p$  pode ser modificado para se ajustar a importância de maiores ou menores diferenças  $u - u_h$ . No caso limite em que  $p$  tende para um número muito grande, maiores diferenças  $u - u_h$  prevalecerão sobre menores diferenças  $u - u_h$  na equação (5.4), o que resulta em

$$\lim_{p \rightarrow \infty} e(u, u_h) = \lim_{p \rightarrow \infty} (u - u_h, \phi)_{L^p} = (u - u_h, \phi)_{L^\infty} = \max(|u - u_h| |\phi|). \quad (5.5)$$

Como ocorre para a equação (5.1), os estimadores de erros da equação (5.3) e da equação (5.4) são ineficientes para serem avaliados na prática. Porém, aplicando o mesmo raciocínio utilizado para se escrever o estimador de erro da equação (5.2), uma aproximação para a equação (5.3) pode ser escrita como

$$e(u, u_h) \approx \left[ \sum_{i=1}^n \Delta t (|\Delta u^{(i)}| |\phi^{(i)}|)^p \right]^{\frac{1}{p}} = \left[ \sum_{i=1}^n \Delta t (|u^{(i)} - u_h^{(i)}| |\phi^{(i)}|)^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (5.6)$$

que é um produto interno  $p$  entre os vetores  $|\Delta u^{(i)}|$  e  $\phi$ , onde cada componente  $i$  é avaliada no tempo  $t^{(i)}$ . Note que a transição da equação (5.3) para a equação (5.6) é feita partindo-se do produto interno entre duas funções para o produto interno entre dois vetores. Neste contexto, os vetores que aparecem na equação (5.6) são as versões discretas das funções que aparecem na equação (5.3).

Neste trabalho o estimador de erro utilizado é obtido tomando-se a função de ponderação como  $\phi = 1$  e  $p = 1$ . A expressão para este estimador de erros pode ser obtido da equação (5.6) como

$$e \approx \sum_{i=1}^n \Delta t |u^{(i)} - u_h^{(i)}|. \quad (5.7)$$

O erro calculado de acordo com a equação (5.7) possuirá unidade dada por comprimento x tempo. Assim, nos exemplos o erro possuirá, de forma geral, unidade dada por m.s.

## 5.2 CONDICIONAMENTO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES

Uma propriedade importante a ser considerada do ponto de vista computacional é o condicionamento do sistema de equações lineares resultante. Esta propriedade diz respeito à facilidade com a qual métodos de solução de sistemas de equações lineares atingem uma dada precisão ao resolver o sistema para uma dada matriz de coeficientes.

Diversos autores apresentam definições do chamado número de condicionamento de uma matriz e diversas maneiras de se estimar este valor (CAREY; ODEN, 1984; BATHE, 1996; SOLÍN et al., 2004; KELLEY, 1995). De acordo com Bathe (1996), Solín et al. (2004) e Carey e Oden (1984), o número de condicionamento espectral de uma matriz  $\mathbf{A}$  é definido como a relação entre o maior e o menor autovalor desta matriz, ou seja,

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \frac{\max(\boldsymbol{\lambda})}{\min(\boldsymbol{\lambda})}, \quad (5.8)$$

onde  $\boldsymbol{\lambda}$  é um vetor contendo os autovalores da matriz  $\mathbf{A}$ . No caso de se calcular o condicionamento da matriz de rigidez toma-se então  $\boldsymbol{\lambda}$  como sendo o vetor que contém os autovalores da matriz de rigidez.

De forma geral, quanto maior o número de condicionamento de uma matriz, maior é o esforço computacional demandado para se resolver o sistemas de equações lineares para uma mesma tolerância (BATHE, 1996; KELLEY, 1995).

Na maioria dos casos de interesse prático, obter todos os autovalores de uma matriz pode ser um procedimento pouco eficiente do ponto de vista computacional e, portanto, estimativas para  $\text{cond}(\mathbf{A})$  estão disponíveis na literatura (CAREY; ODEN, 1984; BATHE, 1996; SOLÍN et al., 2004; KELLEY, 1995).

## 6 ELEMENTO DE BARRA $C^0$ COM DESLOCAMENTOS AXIAIS

Neste capítulo é apresentada a formulação do MEEG proposto para problemas de barras sujeitas apenas a deslocamentos axiais. Primeiramente, é descrito em detalhes a aplicação do Método de Galerkin e a construção dos espaços de aproximação através do MEF, iniciando pelo caso estático. Posteriormente os conceitos são estendidos para o caso da análise dinâmica. Estes desenvolvimentos são apresentados em detalhes para ilustrar o procedimento geral, mas não são repetidos para todos os problemas posteriores.

Alguns estimadores de erros são então apresentados, de forma a descrever o comportamento geral do MEF para o problema em questão. É apresentada também a formulação do MEFH polinomial e do MEEG a ser utilizada. Por fim, são apresentados exemplos de aplicação e uma nota sobre a convergência dos resultados.

### 6.1 O MÉTODO DE GALERKIN PARA O PROBLEMA ESTÁTICO

Antes de discutir a solução aproximada por MEF do problema de vibração de barras é interessante apresentar o problema estático, desconsiderando as variações temporais. Neste caso, a equação diferencial parcial que governa os deslocamentos axiais em uma barra de seção uniforme como aquela mostrada na FIGURA 6.1 é:

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -F(x), \quad \forall x \in \Omega = [a, b], \quad (6.1)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material,  $A$  é a área da seção transversal da barra,  $u$  são os deslocamentos axiais,  $F(x)$  é uma força de corpo distribuída e o domínio do problema é  $\Omega = [a, b]$ . Na equação (6.1) foram adotados  $E$  e  $A$  constantes ao longo da barra. O PVC será então definido ao se estabelecer as condições de contorno do problema.

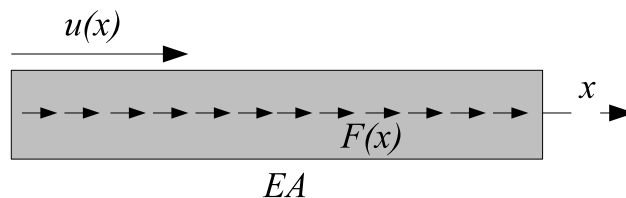


FIGURA 6.1 – BARRA SUJEITA A DESLOCAMENTOS AXIAIS.

Para se obter a forma fraca (ou variacional) do problema dado pela equação (6.1)

multiplica-se a equação (6.1) por uma função teste  $v(x)$  e integra-se no domínio, o que resulta em:

$$EA \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v d\Omega = - \int_{\Omega} F v d\Omega, \quad (6.2)$$

considerando, por simplicidade,  $E$  e  $A$  constantes.

Aplicando a integração por partes no termo da esquerda da equação 6.2 obtém-se

$$EA \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega = EA \left[ \frac{\partial u}{\partial x} v \right]_{\partial\Omega} + \int_{\Omega} F v d\Omega. \quad (6.3)$$

A equação (6.3) é análoga à equação (3.3), sendo o operador bilinear  $a(\bullet, \bullet)$  representado pelo termo da esquerda e o funcional linear  $l(\bullet)$  representado pelo termo da direita.

Adotando-se então uma solução aproximada da forma dada pela equação (3.6) e substituindo na equação (6.3) obtém-se

$$EA \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} c_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x} d_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x} d\Omega = EA \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\partial u}{\partial x} d_j \phi_j \right]_{\partial\Omega} + \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} F d_j \phi_j d\Omega, \quad (6.4)$$

onde o termo  $\partial u / \partial x$  é uma condição de contorno natural. A equação (6.4) pode ser então reescrita como

$$EA \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i d_j \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} d\Omega = EA \sum_{j=1}^N d_j \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \phi_j \right]_{\partial\Omega} + \sum_{j=1}^N d_j \int_{\Omega} F \phi_j d\Omega. \quad (6.5)$$

Como a função de teste é arbitrária, o valor dos coeficientes  $d_j$  na equação (6.5) podem ser quaisquer. Portanto, a equação (6.5) será sempre satisfeita apenas quando

$$EA \sum_{i=1}^N c_i \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} d\Omega = EA \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \phi_j \right]_{\partial\Omega} + \int_{\Omega} F \phi_j d\Omega \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (6.6)$$

o que resulta no seguinte sistema de equações lineares

$$\mathbf{Kc} = \mathbf{F}, \quad (6.7)$$

onde

$$K_{ij} = a(\phi_i, \phi_j) = EA \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} d\Omega \quad (6.8)$$

e

$$F_i = l(\phi_j) = EA \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \phi_i \right]_{\partial\Omega} + \int_{\Omega} F \phi_i d\Omega. \quad (6.9)$$

A solução da equação (6.7) permite então que sejam obtidos os coeficientes  $c_i$  da solução aproximada. No contexto da mecânica dos sólidos a matriz  $\mathbf{K}$  é comumente chamada de matriz de rigidez e o vetor  $\mathbf{F}$  é chamado de vetor de forças.

## 6.2 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA O PROBLEMA ESTÁTICO

Para obter soluções aproximadas para o problema dado pela equação (6.1) com o MEF é necessário construir um espaço de elementos finitos (espaço aproximado), ou seja, gerar as funções de aproximação globais  $\phi(x)$ . Como visto anteriormente, o primeiro passo para construir este espaço é particionar o domínio do problema em diversos subdomínios.

### 6.2.1 Particionamento de $\overline{\Omega}$

O domínio  $\Omega$  do problema é dado pelo intervalo  $(a, b)$  com contorno dado por  $\partial\Omega = \{a, b\}$ . Caso sejam utilizados elementos finitos de tamanhos iguais, pode-se particionar o domínio do problema da seguinte maneira:

$$\Omega_e^i = (a + (i - 1)h, a + ih), \quad \forall i = 1, 2, \dots, N_e, \quad (6.10)$$

$$h = \frac{b - a}{N_e}, \quad (6.11)$$

onde  $\Omega_e^i$  é o domínio de cada elemento finito,  $N_e$  é o número de subdomínios utilizados e  $h$  é o tamanho de cada subdomínio  $\Omega_e^i$ . Esta partição é ilustrada na FIGURA 6.2. Além disso, os contornos dos subdomínios são definidos por

$$\partial\Omega_e^i = \{a + (i - 1)h, a + ih\}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N_e. \quad (6.12)$$

O fechamento de cada subdomínio será então  $\overline{\Omega}_e^i = \Omega_e^i \cup \partial\Omega_e^i$ , o que resulta no

intervalo fechado

$$\overline{\Omega}_e^i = [a + (i - 1)h, a + ih], \forall i = 1, 2, \dots, N_e. \quad (6.13)$$

Finalmente, a partição do domínio do problema é dada por:

$$Q_h = \{\overline{\Omega}_e^1, \overline{\Omega}_e^2, \dots, \overline{\Omega}_e^{N_e}\}. \quad (6.14)$$

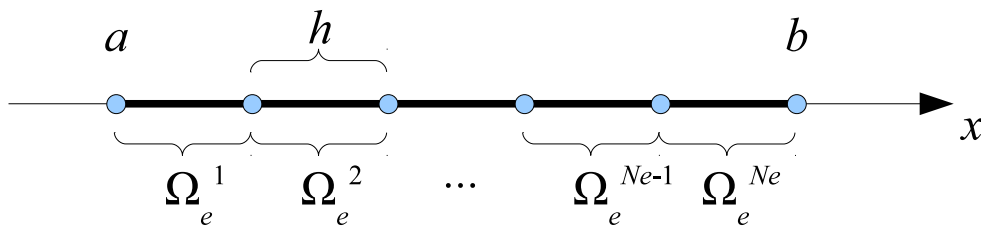


FIGURA 6.2 – PARTIÇÃO DO DOMÍNIO DO PROBLEMA EM  $N_e$  ELEMENTOS FINITOS.

Note que este particionamento respeita as condições definidas na seção 3.4.5.

### 6.2.2 Interpolação local

Para representar a interpolação local dentro de um dado subdomínio  $\overline{\Omega}_e$  é conveniente utilizar um sistema de coordenadas locais, pois isto facilita a definição das funções de aproximação. Define-se então uma transformação de coordenadas de um elemento finito qualquer  $x \in \overline{\Omega}_e^i = [x_i, x_f]$  (onde  $x_i$  e  $x_f$  são os nós inicial e final do elemento) para um elemento mestre com coordenadas  $\xi \in \hat{\Omega} = [-1, 1]$  da seguinte forma (CAREY; ODEN, 1983):

$$\xi = \frac{2x - (x_i + x_f)}{(x_f - x_i)}. \quad (6.15)$$

As funções  $\psi_i$  são então escritas no sistema de coordenadas locais  $\xi$ .

Na forma mais tradicional do MEF, para problemas de segunda ordem, estas funções são tomadas como sendo polinômios de Lagrange (BECKER et al., 1981; REDDY, 1998). Dado um número  $n$  de nós (pontos) a serem utilizados na aproximação, os  $n$  polinômios de Lagrange podem ser obtidos da seguinte fórmula (HUGHES, 1987):



$$l_i(\xi) = \frac{\prod_{b=1, b \neq i}^n (\xi - \xi_b)}{\prod_{b=1, b \neq i}^n (\xi_i - \xi_b)}, \quad (6.16)$$

onde  $l_i(\xi)$  é o polinômio associado ao nó  $i$  e  $\xi_i$  é a coordenada do nó  $i$ .

Note que os polinômios de Lagrange terão ordem  $k = n - 1$ . Portanto, para se gerar uma aproximação quadrática são necessário 3 nós, para se gerar uma aproximação cúbica são necessário 4 nós e assim por diante.

Para  $n = 2$  tem-se

$$l_1(\xi) = \frac{(\xi - \xi_2)}{(\xi_1 - \xi_2)}, \quad l_2(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)}{(\xi_2 - \xi_1)}, \quad (6.17)$$

que são mostrados na FIGURA 6.3 para nós com coordenadas  $\xi_1 = -1$  e  $\xi_2 = 1$ .

Para  $n = 3$  tem-se

$$l_1(\xi) = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)}, \quad l_2(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)}, \quad l_3(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)}, \quad (6.18)$$

que são mostrados na FIGURA 6.4 para nós com coordenadas  $\xi_1 = -1$ ,  $\xi_2 = 0$  e  $\xi_3 = 1$ .

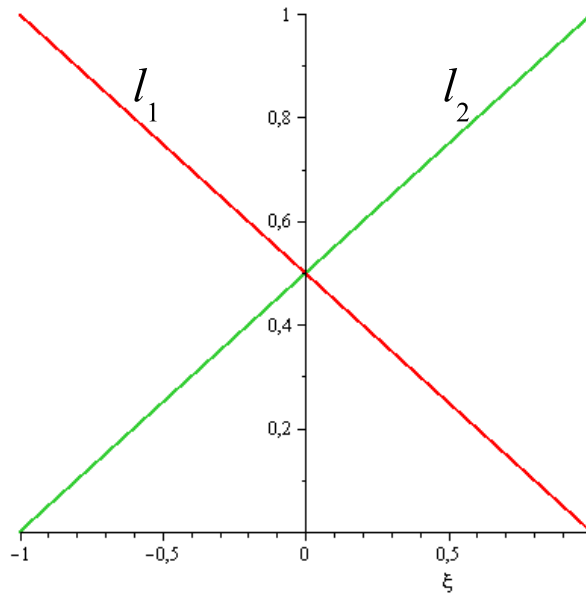


FIGURA 6.3 – POLINÔMIOS DE LAGRANGE PARA  $n = 2$ .

Da FIGURA 6.3 e da FIGURA 6.4 nota-se uma característica importante dos polinômios de Lagrange. Estes polinômios valem 1 em seu nó associado e valem zero em

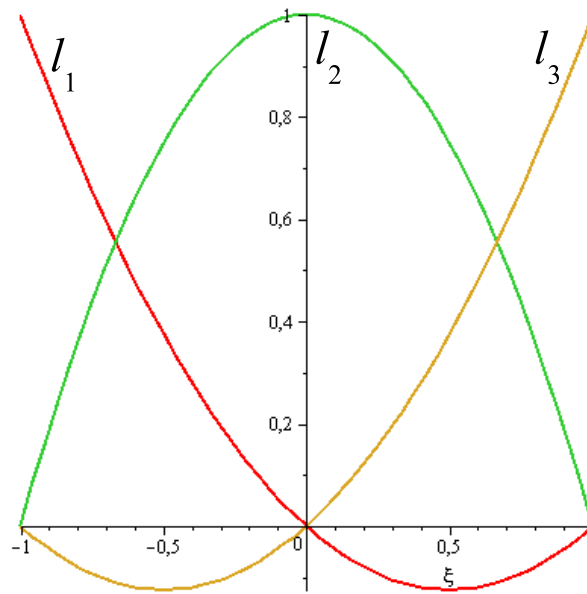


FIGURA 6.4 – POLINÔMIOS DE LAGRANGE PARA  $n = 3$ .

todos os outros nós. Esta propriedade é também conhecida como propriedade  $\delta$  e ajuda na imposição de condições de contorno essenciais ao problema sendo aproximado, como descrito em detalhes por Reddy (1998) e Hughes (1987). Além disso, pode-se demonstrar que os polinômios de Lagrange de qualquer ordem quando somados resultam na unidade (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000; HUGHES, 1987; BECKER et al., 1981). Esta característica é muito importante pois garante que a aproximação seja capaz de representar adequadamente uma solução constante.

Porém, os polinômios de Lagrange possuem uma característica indesejável. Apesar de serem fáceis de obter, ao se aumentar a ordem da aproximação deve-se determinar todos os polinômios novamente. Isto pode ser visto ao se comparar a equação (6.17) com a equação (6.18). Nota-se que nenhum polinômio da aproximação para  $n = 2$  é utilizado na aproximação para  $n = 3$ . Este fato pode ser contornado ao se utilizar uma família de polinômios chamados hierárquicos, conforme discutido na Seção 6.4.

Os polinômios de Lagrange podem ser utilizados como as funções de aproximação locais  $\psi_i$  da equação (3.26). Neste caso costuma-se denominar o método como o MEF de Lagrange ou MEF lagrangeano. A aproximação no elemento mestre  $\hat{\Omega}$  é dada neste caso por

$$u_h(\xi) = \sum_{i=1}^n u_i l_i(\xi), \quad (6.19)$$

onde  $u_i$  são os valores da aproximação nos nós do elemento mestre.

A aproximação gerada dentro do elemento mestre pode então ser utilizada para um elemento qualquer, aplicando-se o inverso da transformação dada pela equação (6.15). Assim, a aproximação dentro de um elemento qualquer dada pela equação (3.26) pode ser reescrita como

$$u_h^e(x) = \sum_{i=1}^n u_i^e \psi_i(x), \quad (6.20)$$

$$\psi_i = l_i(x), \quad (6.21)$$

onde  $u_i^e$  são os valores da aproximação nos nós do elemento e as funções de aproximação locais  $\psi_i$  são tomadas iguais aos polinômios de Lagrange  $l_i$  definidos para o elemento em questão.

### 6.2.3 Montagem

Uma vez que a aproximação dentro de cada elemento finito tenha sido gerada, pode-se utilizar estas aproximações para se construir a aproximação global do problema. Isto é feito encaixando-se elementos finitos adjacentes e encaixando-se as aproximações locais, como mostrado na FIGURA 6.5 para uma aproximação de ordem  $k = 1$ . Nota-se que elementos adjacentes compartilham os nós de suas extremidades.

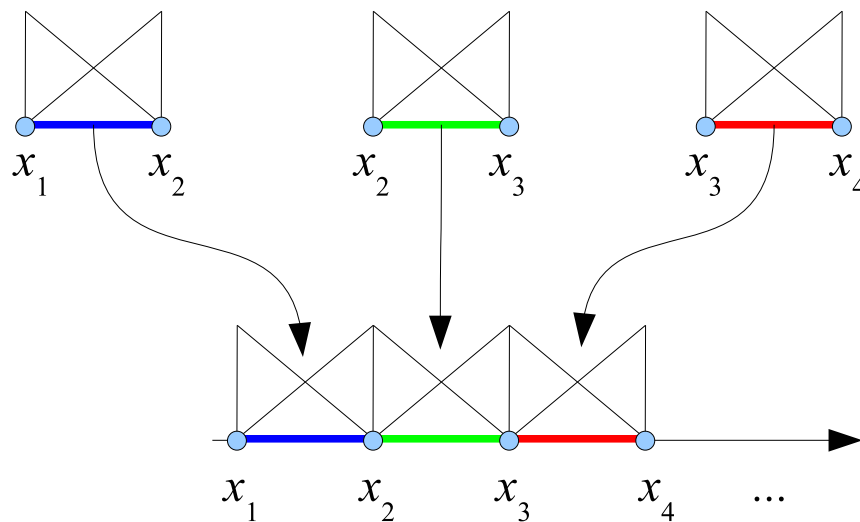


FIGURA 6.5 – MONTAGEM DA APROXIMAÇÃO GLOBAL ATRAVÉS DO ENCAIXE DE APROXIMAÇÕES LOCAIS.

Da FIGURA 6.5 pode-se notar que, exceto para os nós do contorno  $\partial\Omega$ , existirão

duas funções de aproximação local que valem 1 em cada nó. Para o caso da FIGURA 6.5, por exemplo, a segunda função do primeiro elemento finito e a primeira função do segundo elemento finito valem 1 em  $x = x_2$ . Além disso, o valor de  $u$  em  $x = x_2$  definirá a aproximação das duas funções neste nó, como pode ser visto na equação (6.20). Pode-se então juntar estas duas funções de aproximação local para formar uma única função de aproximação global. Este procedimento gera as funções de aproximação globais  $\phi_i$  mostradas na FIGURA 6.6.

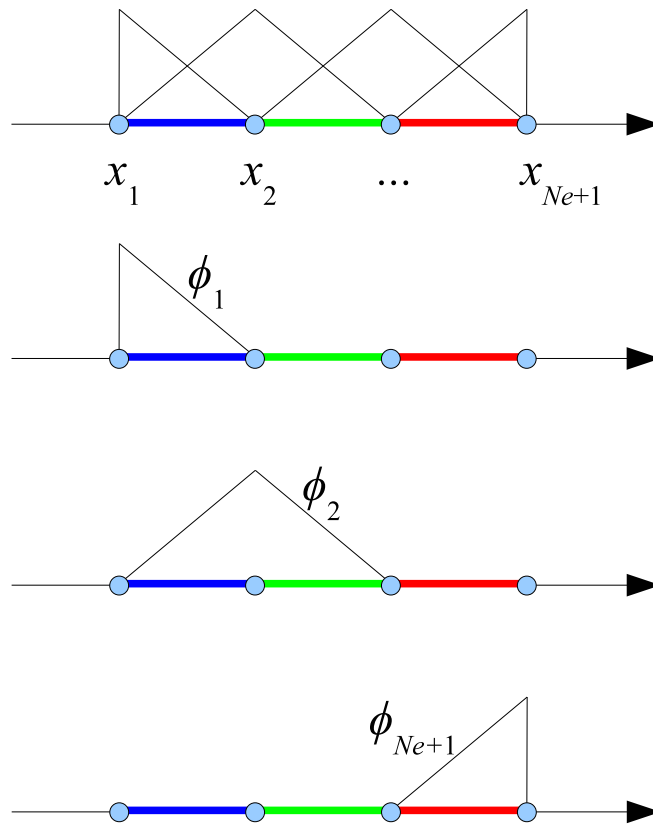


FIGURA 6.6 – FUNÇÕES DE APROXIMAÇÕES GLOBAIS, OBTIDAS DO ENCAIXE DAS FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO LOCAIS.

A aproximação global  $u_h$  é então dada pela equação (3.28), o que resulta em

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N_e+1} u_i \phi_i(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad (6.22)$$

onde  $u_i$  são os valores dos graus de liberdade e valem

$$u_i = u(x = x_i). \quad (6.23)$$

A matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  e o vetor de forças  $\mathbf{F}$  da equação (6.7) podem então ser obtidos das contribuições de cada elemento, como mostrado na equação (3.30) e na equação (3.31), o que resulta em

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{K}^e \quad (6.24)$$

e

$$\mathbf{F} = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{F}^e, \quad (6.25)$$

onde

$$K_{ij}^e = a(\psi_i, \psi_j) = EA \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} d\Omega^e \quad (6.26)$$

e

$$F_i^e = l(\psi_i) = EA \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \psi_i \right]_{\partial \Omega} + \int_{\Omega} F \psi_i d\Omega^e. \quad (6.27)$$

Além disso, da equação (6.20) pode-se concluir que os coeficientes das funções de aproximação locais são na verdade os valores nodais e, portanto, o sistema de equações lineares da equação (6.7) pode ser reescrito como

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{F}, \quad (6.28)$$

onde  $\mathbf{u}$  são os valores da aproximação nos nós e ao mesmo tempo os coeficientes da solução aproximada da equação (6.22).

Para PVCs de segunda ordem, como o descrito nesta seção, podem ser utilizadas aproximações lineares. Isto porque o PVCV associado utiliza uma derivada de primeira ordem das funções de aproximação e, portanto, uma aproximação linear é suficiente para garantir a aplicação do método. Assim, a derivada primeira da aproximação  $u_h$  pode ser descontínua e o espaço de elementos finitos  $V^h(\Omega)$  gerado pelas funções de aproximação  $\phi_i$  pode ser definido de forma que  $V^h \subset C^0$ . Este tipo de espaço de aproximação é também conhecido como  $C^0$  e é característico de PVCs regidos por operadores diferenciais de segunda ordem.

#### 6.2.4 Estimadores de erros

O Teorema 3.4 e o Corolário 3.1 indicam que é possível representar uma função contínua qualquer através de polinômios, sendo que a aproximação pode ser melhorada indefinidamente aumentando-se o número de polinômios utilizados.

Um resultado bastante conhecido sobre o MEF é que qualquer polinômio de ordem menor ou igual a  $k$  pode ser representado univocamente por polinômios de Lagrange de ordem  $k$  em um intervalo fechado (BECKER et al., 1981). Ou seja, os polinômios de Lagrange de ordem  $k$  formam uma base para o espaço  $P_k$  dos polinômios de ordem menor ou igual a  $k$ . Este resultado é apresentado na forma do seguinte lema.

**Lema 6.1** (Polinômios de Lagrange). Os polinômios de Lagrange de ordem  $k$  obtidos de acordo com a equação (6.16) são uma base para o espaço  $P_k$  dos polinômios de ordem menor ou igual a  $k$  em um intervalo fechado  $[-1, 1]$ .

Portanto, do Lema 6.1 e do Corolário 3.1, pode-se concluir que para se melhorar a aproximação de funções contínuas indefinidamente basta aumentar a ordem dos polinômios de Lagrange utilizados. Para  $k \rightarrow \infty$  o espaço de aproximação  $V^h$  será denso no espaço de soluções  $V$  e, portanto, será capaz de gerar uma aproximação com erro arbitrariamente pequeno. Este tipo de procedimento é chamado de refino  $p$ , pois comumente utiliza-se  $p$  para se referir à ordem da aproximação.

Porém, dificuldades numéricas e computacionais tornam a utilização de polinômios de Lagrange de alta ordem bastante problemática. Um problema numérico observado neste caso é que as matrizes obtidas do Método de Galerkin tendem a tornar-se mal condicionadas, o que dificulta a solução do sistema de equações lineares (SOLÍN et al., 2004). Outro problema é que os polinômios de Lagrange de ordem  $k$  são todos diferentes dos polinômios de Lagrange de ordem  $k - 1$ , como pode ser visto na equação (6.17) e na equação (6.18). Portanto, ao se aumentar a ordem do polinômio interpolador de Lagrange deve-se obter todas as matrizes do problema novamente, sendo que nenhuma informação anterior é reaproveitada. Por fim, o refino  $p$  pode não ser uma metodologia eficiente para a solução de problemas com soluções não suaves, que apresentam singularidades ou descontinuidades (MELENK; BABUSKA, 1996a).

Por estes motivos, um procedimento bastante comum para se obter melhores aproximações é aumentar o número de elementos finitos ao invés de se aumentar a ordem da interpolação. Este tipo de procedimento é denominado refino  $h$ , pois diz respeito ao tamanho dos elementos. Ao se aumentar o número de elementos finitos o tamanho de cada elemento  $h$  será reduzido e, então, é de se esperar que melhores aproximações locais possam ser obtidas. Matematicamente este procedimento é respaldado pelo seguinte teorema, demonstrado por Reddy (1998).

**Teorema 6.1** (Estimador de erro para problemas de segunda ordem). Considere o PVCV que busca  $u \in V$  tal que

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V \subset H^1(\Omega), \quad (6.29)$$

onde  $a(\bullet, \bullet)$  é contínuo e V-Elíptico e  $l(\bullet)$  é contínuo em  $V$ . Se  $u_h$  é a aproximação por elementos finitos da solução em  $V^h$ , então existe uma constante  $C$  independente de  $h$  tal que

$$\|u - u_h\|_1 \leq Ch^k \|u\|_{k+1}, \quad (6.30)$$

onde  $k$  é a ordem do espaço polinomial de aproximação.

Na prática, a solução  $u$  pode não pertencer ao espaço  $H^{k+1}$  e, portanto, o termo  $\|u\|_{k+1}$  da equação (6.30) pode não fazer sentido. Porém, de acordo com Reddy (1998), neste caso pode-se reescrever a equação (6.30) e obter um estimador para  $u$  pertencente a  $H^m$  para  $m \geq 1$ . Este resultado é apresentado aqui na forma de um corolário para o Teorema 6.1.

**Corolário 6.1.** Suponha que as condições do Teorema 6.1 sejam válidas e que a solução exata do PVCV  $u$  pertence a um espaço  $H^r$  com  $r \geq 1$ . Então existe uma constante  $C$  independente de  $h$  tal que

$$\|u - u_h\|_1 \leq Ch^{\min(k, r-1)} \|u\|_r. \quad (6.31)$$

O Corolário 6.1 é de extrema importância para o MEF pois afirma que o erro da aproximação  $u - u_h$  pode ser reduzido arbitrariamente ao se reduzir o tamanho dos elementos  $h$ . Além disso, a taxa de convergência do método depende do expoente  $\min(k, r - 1)$ . Quando  $r - 1$  for maior que a ordem da aproximação  $k$ , então a convergência terá ordem  $k$ . Neste caso, aproximações de ordem mais alta serão capazes de convergir mais rapidamente para a solução analítica ao se reduzir o tamanho dos elementos  $h$ .

Porém, quando  $r - 1$  for igual ou menor que  $k$ , um aumento na ordem da aproximação não será capaz de melhorar os resultados. Este fato é uma das motivações principais do MPU (MELENK; BABUSKA, 1996a) e diz respeito a problemas com soluções não suaves, descontínuas ou que apresentem singularidades.

### 6.3 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA O PROBLEMA DINÂMICO

Para o problema dinâmico, a equação diferencial parcial que governa os deslocamentos axiais em uma barra de seção uniforme como aquela mostrada na FIGURA 6.1 é (TIMOSHENKO; GOODIER, 1951):

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - F(x, t), \quad \forall x \in \Omega = [a, b], \quad (6.32)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material,  $\rho$  é a massa específica do material,  $A$  é a área da seção transversal da barra,  $u(x, t)$  são os deslocamentos axiais,  $F(x, t)$  é uma força de corpo distribuída e o domínio do problema é  $\Omega = [a, b]$ .

Para se obter a forma fraca (ou variacional) do problema dinâmico basta multiplicar a equação (6.32) por uma função de teste  $v(x)$  e integrar no domínio, o que resulta em:

$$EA \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v d\Omega = \rho A \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v d\Omega - \int_{\Omega} F v d\Omega. \quad (6.33)$$

Realizando a integração por partes do termo à esquerda e rearranjando obtém-se

$$EA \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega + \rho A \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v d\Omega = EA \left[ \frac{\partial u}{\partial x} v \right]_{\partial\Omega} + \int_{\Omega} F v d\Omega. \quad (6.34)$$

Adotando então uma solução aproximada da forma dada pela equação (3.6) obtém-se

$$EA \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} c_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x} d_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x} d\Omega + \rho A \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} d_j \phi_j d\Omega = \quad (6.35)$$

$$EA \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\partial u}{\partial x} d_j \phi_j \right]_{\partial\Omega} + \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} F d_j \phi_j d\Omega, \quad (6.36)$$

Derivando-se a aproximação dada pela equação (3.6) em relação ao tempo obtém-se a seguinte relação:

$$\frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{i=1}^N c_i \phi_i = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 c_i}{\partial t^2} \phi_i = \sum_{i=1}^N \ddot{c}_i \phi_i, \quad (6.37)$$

onde  $\ddot{c}$  representa a derivada segunda de  $c$  em relação ao tempo.

A substituição da equação (6.37) na equação (6.36) resulta em



$$EA \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} c_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x} d_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x} d\Omega + \rho A \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \ddot{c}_i \phi_i d_j \phi_j d\Omega = \quad (6.38)$$

$$EA \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\partial u}{\partial x} d_j \phi_j \right]_{\partial\Omega} + \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} F d_j \phi_j d\Omega, \quad (6.39)$$

que pode ser reescrita como

$$EA \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i d_j \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} d\Omega + \rho A \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \ddot{c}_i d_j \int_{\Omega} \phi_i \phi_j d\Omega = \quad (6.40)$$

$$EA \sum_{j=1}^N d_j \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \phi_j \right]_{\partial\Omega} + \sum_{j=1}^N d_j \int_{\Omega} F \phi_j d\Omega. \quad (6.41)$$

Como a função teste é arbitrária, o valor dos coeficientes  $d_j$  na equação (6.41) são quaisquer. Assim, a equação (6.41) será sempre satisfeita apenas quando

$$EA \sum_{i=1}^N c_i \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} d\Omega + \rho A \sum_{i=1}^N \ddot{c}_i \int_{\Omega} \phi_i \phi_j d\Omega = EA \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \phi_j \right]_{\partial\Omega} + \int_{\Omega} F \phi_j d\Omega, \quad (6.42)$$

que resulta no seguinte sistema de equações

$$\mathbf{K}\mathbf{c} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{c}} = \mathbf{F}, \quad (6.43)$$

onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez apresentada na equação (6.8),  $\mathbf{F}$  é o vetor de forças mostrado na equação (6.9) e  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa consistente dada por

$$M_{ij} = \rho A \int_{\Omega} \phi_i \phi_j d\Omega. \quad (6.44)$$

No caso do MEF lagrangeano os coeficientes da solução aproximada são os valores nodais. Portanto, o sistema de equações dado pela equação (6.42) pode ser reescrito como

$$\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}, \quad (6.45)$$

onde  $\mathbf{u}$  são os valores dos deslocamentos nodais,  $\ddot{\mathbf{u}}$  são os valores das acelerações nodais, a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  pode ser avaliada de acordo com a equação (6.24), o vetor

de forças  $F$  pode ser avaliado de acordo com a equação (6.25) e a matriz de massa  $M$  pode ser avaliada fazendo-se

$$M = \sum_{e=1}^{N_e} M^e \quad (6.46)$$

onde

$$M_{ij}^e = \rho A \int_{\Omega} \psi_i \psi_j d\Omega^e. \quad (6.47)$$

Para resolver o sistema de equações dado pela equação (6.45) é necessário aplicar um método de integração no tempo. Duas alternativas clássicas para se resolver este problema são descritas no Apêndice A, que são o Método de Newmark e o Método da Superposição Modal.

### 6.3.1 Estimadores de erros para problemas de análise dinâmica

Uma forma de se resolver o problema dado pela equação (6.45) é utilizar o Método da Superposição Modal, descrito em detalhes no Apêndice A. Nesta abordagem a solução aproximada do problema é escrita como a superposição de diversos modos fundamentais de vibração da estrutura. No contexto do MEF, os modos fundamentais de vibração das estruturas são obtidos de maneira aproximada. Assim, é de se esperar que melhores aproximações para os modos fundamentais de vibração sejam capazes de gerar melhores resultados no Método da Superposição Modal.

O problema da análise modal utilizando o MEF é discutido em detalhes por Bathe (1996), Hughes (1987), Carey e Oden (1983) e Carey e Oden (1984). Carey e Oden (1983) demonstram que o erro da aproximação pelo MEF para os autovalores de um problema de autovalores e autovetores é dado por:

$$\lambda^s \leq \lambda_h^s \leq \lambda^s + C_1 h^{2(k+1-m)} (\lambda^s)^{(k+1)/m}, \quad (6.48)$$

para  $h$  suficientemente pequeno, onde  $\lambda^s$  é o  $s$ -ésimo autovalor exato,  $\lambda_h^s$  é o  $s$ -ésimo autovalor aproximado,  $h$  é o tamanho dos elementos,  $2m$  é a ordem do operador diferencial,  $k$  é a ordem da aproximação polinomial e  $C_1$  é uma constante.

A equação (6.48) resume dois resultados muito importantes para o problema da análise modal. Primeiramente, pode-se observar que um autovalor aproximado (e, portanto, uma frequência aproximada) será sempre maior ou igual ao autovalor exato. Assim, de forma geral, pode-se dizer que uma frequência de vibração relacionada a um

dado modo de vibração será mais precisa quanto menor for seu valor. Isto permite comparar duas soluções aproximadas mesmo sem conhecer os valores das frequências exatas.

Da equação (6.48) observa-se também que o erro na determinação do autovalor aproximado  $\lambda_h$  depende da magnitude do autovalor exato  $\lambda$ . Assim, frequências de ordem mais alta necessitam, em geral, de um número elevado de graus de liberdade para que sejam obtidas com certa precisão.

Além disso, o erro da aproximação na equação (6.48) é elevado a  $(k + 1)/m$ , ou seja, depende da ordem da aproximação utilizada. Isto pode fazer com que aproximações de ordem mais elevada obtenham resultados piores para as frequências de ordem mais elevada, para um mesmo número de graus de liberdade. Este comportamento pode ser observado em alguns exemplos apresentados mais adiante.

Carey e Oden (1983) também demonstram que o erro da aproximação pelo MEF para os autovetores é dado por:

$$\|\phi^s - \phi_h^s\|_m \leq C_2 h^{2(k+1-m)} (\lambda^s)^{(k+1)/m}, \quad (6.49)$$

onde  $\phi^s$  é o  $s$ -ésimo autovetor exato,  $\phi_h^s$  é o  $s$ -ésimo autovetor aproximado e  $C_2$  é uma constante. Da equação (6.49) pode-se notar que o erro para os autovetores tem forma muito semelhante ao erro para os autovalores, dado pela equação (6.48).

Arndt (2009) e Arndt et al. (2010) demonstraram que o MEFG é capaz de obter soluções muito precisas para problemas da análise modal. Isto porque no caso do MEFG é possível incluir funções de aproximação locais que contenham informações conhecidas *a priori* sobre a solução do problema. Assim, é de se esperar que a utilização do MEFG para a análise dinâmica através do Método da Superposição Modal seja capaz de obter boas soluções, uma vez que os modos fundamentais de vibração podem ser obtidos com grande precisão por este método.

## 6.4 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS HIERÁRQUICO

A formulação mais tradicional do MEF utiliza como funções de aproximação locais os polinômios de Lagrange no caso de problemas de segunda ordem e os polinômios de Hermite no caso de problemas de quarta ordem (HUGHES, 1987). Porém, ao se aumentar a ordem da aproximação os polinômios são todos alterados, o que dificulta a implementação de elementos de ordem arbitrária.

Neste contexto foi introduzido o conceito do MEFH, onde o aumento da ordem da

aproximação se faz sem alterar as funções de aproximação locais de ordens menores. Isto facilita a formulação de elementos de ordem mais alta, uma vez que ao se passar de uma aproximação de ordem  $k$  para uma aproximação de ordem  $k + 1$  apenas uma função de aproximação local precisa ser obtida, sendo que as outras permanecem inalteradas.

Além disso, no caso do MEF lagrangeano o aumento da ordem da aproximação frequentemente ocasiona o aumento do número de condicionamento da matriz de rigidez, o que dificulta a solução numérica dos sistemas de equações lineares (SOLÍN et al., 2004). Este é outro fator que impede a utilização do MEF lagrangeano para elementos de ordem muito elevada. No caso do MEFH, o aumento da ordem da aproximação polinomial também causa o aumento do número de condicionamento da matriz de rigidez, mas não de forma tão acentuada quanto ocorre para o MEF lagrangeano.

É também desejável que as funções de aproximação adicionais não interfiram nos valores nodais dos elementos de forma a manter a propriedade  $\delta$  dos elementos finitos, onde apenas uma função de aproximação local é não nula em cada nó. Esta propriedade garante a facilidade em se aplicar condições de contorno e em processar os resultados nodais.

No caso do MEF lagrangeano, o aumento da ordem da aproximação implica na inclusão de novos nós dentro do elemento e, portanto, as rotinas computacionais devem ser ajustadas de forma a lidar com as condições de contorno de maneira apropriada. Já no caso do MEFH, as funções de aproximação locais são criadas de forma a não interferirem nos valores nodais dos elementos e, portanto, todas as manipulações relacionadas aos nós da malha permanecem inalterados. A prescrição de forma nodais concentradas, por exemplo, permanece inalterada quando o número de funções de aproximação é aumentado.

O MEFH para elementos de barras pode ser obtido de maneira bastante eficiente ao se tomar as funções de aproximação locais como polinômios de Lobatto. Os polinômios de Lobatto podem ser obtidos a partir da integração dos polinômios de Legendre (SOLÍN et al., 2004; KREYSZIG, 1978; BYRON; FULLER, 1992), como descrito em maiores detalhes por Solín et al. (2004). No caso de um domínio  $x = [-1, 1]$ , os polinômios de Lobatto tem a seguinte forma:

$$l_0(x) = \frac{1-x}{2}, \quad (6.50)$$

$$l_1(x) = \frac{1+x}{2} \quad (6.51)$$

e

$$l_k(x) = \frac{1}{\|L_{k-1}\|_2} \int_{-1}^x L_{k-1}(\xi) d\xi, \quad 2 \leq k, \quad (6.52)$$

onde  $\|\bullet\|_2$  é a norma  $L^2$  de uma função (SOLÍN et al., 2004; KREYSZIG, 1978; REDDY, 1998) e  $L_k$  são os polinômios de Legendre de ordem  $k$  no intervalo  $x = [-1, 1]$ , que são definidos como (SOLÍN et al., 2004)

$$L_0(x) = 1, \quad (6.53)$$

$$L_1(x) = x, \quad (6.54)$$

$$L_k(x) = \frac{2k-1}{k} x L_{k-1}(x) - \frac{k-1}{k} L_{k-2}(x), \quad k = 2, 3, \dots, \quad (6.55)$$

Do processo de integração da equação (6.52) os seguintes polinômios de Lobatto são obtidos (SOLÍN et al., 2004)

$$l_2(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} (x^2 - 1), \quad (6.56)$$

$$l_3(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (x^2 - 1)x, \quad (6.57)$$

$$l_4(x) = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{7}{2}} (x^2 - 1)(5x^2 - 1), \quad (6.58)$$

$$l_5(x) = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{9}{2}} (x^2 - 1)(7x^2 - 3)x, \quad (6.59)$$

$$l_6(x) = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{11}{2}} (x^2 - 1)(21x^4 - 14x^2 + 1), \quad (6.60)$$

$$l_7(x) = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{13}{2}} (x^2 - 1)(33x^4 - 30x^2 + 5)x, \quad (6.61)$$

$$l_8(x) = \frac{1}{128} \sqrt{\frac{15}{2}} (x^2 - 1)(429x^6 - 495x^4 + 135x^2 - 5), \quad (6.62)$$

$$l_9(x) = \frac{1}{128} \sqrt{\frac{17}{2}} (x^2 - 1)(715x^6 - 1001x^4 + 385x^2 - 35)x \quad (6.63)$$

e

$$l_{10}(x) = \frac{1}{256} \sqrt{\frac{19}{2}} (x^2 - 1)(2431x^8 - 4004x^6 + 2002x^4 - 308x^2 + 7). \quad (6.64)$$

Alguns polinômios de Lobatto são mostrados na FIGURA 6.7, onde pode-se notar que os polinômios de ordem maior que 2 são sempre nulos em  $x = -1$  e  $x = 1$ . Isto facilita o manuseio de condições de contorno e o pós processamento de quantidades nodais.

No contexto deste trabalho, as funções de forma adicionadas além daquelas que formam um elemento linear são chamadas também de funções de enriquecimento. Assim, os polinômios de Lobatto  $l_i$  para  $i = 2, 3, \dots$  são referenciados como funções de enriquecimento.

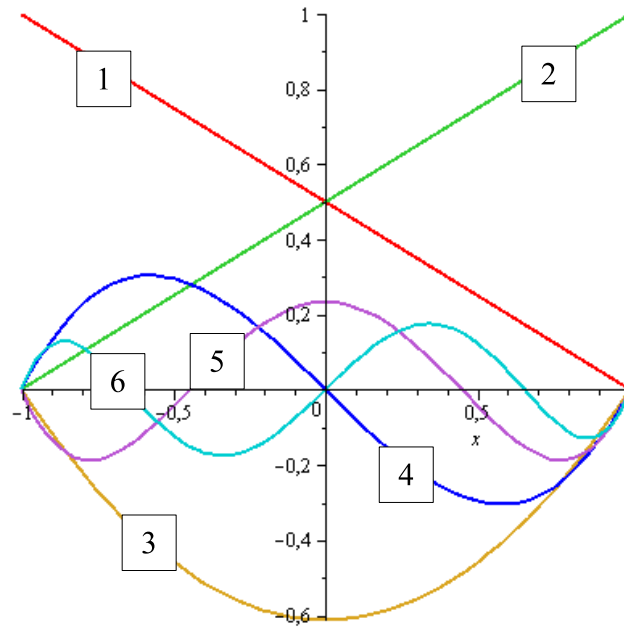


FIGURA 6.7 – POLINÔMIOS DE LOBATTO PARA  $k = 6$ .

Apesar de muitos autores apresentarem polinômios de Legendre ou de Lobatto até uma dada ordem (SOLÍN et al., 2004; BYRON; FULLER, 1992), o procedimento geral para a obtenção das funções de aproximação locais neste caso envolve obter os polinômios de Legendre e depois integrá-los de acordo com a equação (6.52). Para elementos de ordem arbitrária este procedimento pode ser bastante trabalhoso. Porém, uma vez que estes polinômios estejam catalogados sua utilização é direta e bastante eficiente.

Adotando os seis primeiros polinômios de Lobatto como funções de aproximação locais e utilizando a equação (6.26) e a equação (6.47) as matrizes de rigidez e de massa de um elemento finito linear são

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & 2 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & 2 & 0 & 0 \\ . & \text{sim.} & . & . & 2 & 0 \\ . & . & . & . & . & 2 \end{bmatrix} \quad (6.65)$$

e

$$\mathbf{M}^e = \rho AL \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{10}}{60} & 0 & 0 \\ . & \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{12} & -\frac{\sqrt{10}}{60} & 0 & 0 \\ . & . & \frac{1}{5} & 0 & -\frac{\sqrt{84}}{420} & 0 \\ . & . & . & \frac{1}{21} & 0 & -\frac{\sqrt{20}}{420} \\ . & \text{sim.} & . & . & \frac{1}{45} & 0 \\ . & . & . & . & . & \frac{1}{77} \end{bmatrix}, \quad (6.66)$$

que são ambas matrizes simétricas, onde  $L$  é o comprimento do elemento.

Da equação (6.65) pode-se observar uma característica bastante importante do MEFH. Primeiramente, ao se considerar um elemento linear, a matriz de rigidez se reduz àquela que seria obtida com um elemento lagrangeano linear. Porém, ao se aumentar a ordem do elemento são acrescentados termos apenas à diagonal da matriz de rigidez. Isto deve-se ao fato dos polinômios de Lobatto serem ortogonais em relação à norma dada pelo operador bilinear da forma fraca do problema abordado (SOLÍN et al., 2004). Esta característica faz com que as matrizes de rigidez obtidas com o MEFH sejam bem condicionadas e fáceis de se obter. Este assunto é discutido em maiores detalhes por Solín et al. (2004).

Porém, estas características são válidas apenas para o problema unidimensional. Ao se utilizar os polinômios de Lobatto para gerar funções de aproximação para problemas bidimensionais, estas características podem não ser mantidas. Além disso, a matriz de massa não pode ser obtida apenas acrescentando-se termos à sua diagonal.

## 6.5 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADO

Neste trabalho são utilizadas as funções de aproximação do MEFG obtidas por Arndt (2009). A ideia desta abordagem é adicionar funções de base trigonométricas que representem a solução analítica do problema, ao invés de tentar adicionar funções de base polinomiais que formem uma base completa. Desta forma é possível obter resultados bastante precisos para os modos de vibração. A eficiência desta abordagem foi demonstrada por Arndt (2009) e Arndt et al. (2010) para problemas de vibração livre de estruturas de barras.

Aqui será utilizada a formulação denominada MEFG-2 por Arndt (2009), pois foi aquela que apresentou melhores resultados em seu trabalho. Neste trabalho esta formulação será denominada apenas de MEFG, pois será a única utilizada.

A solução analítica de problemas relacionados com vibrações e propagações de ondas envolve, em muitos casos, séries de Fourier contendo termos trigonométricos (DUFFY, 1998). Assim, as funções de base propostas por Arndt (2009) foram tomadas como funções trigonométricas, com argumento que pode ser modificado para se ajustar às características do problema sendo estudado.

Para garantir que as funções do MPU sempre se anulem nos nós, evitando a necessidade de procedimentos especiais para a imposição das condições de contorno, Arndt (2009) subtraiu 1 de algumas funções de base. Mais adiante o efeito desta modificação será discutido em detalhes.

A formulação proposta por Arndt (2009) pode ser então obtida utilizando-se uma PU dada pelas funções lineares do MEF Lagrangeano,

$$\varphi_1(\xi) = \frac{1 - \xi}{2} \quad \varphi_2(\xi) = \frac{1 + \xi}{2}, \quad (6.67)$$

e funções de base dadas por

$$v_{1j} = \text{sen} \left( \frac{\beta_j(\xi + 1)}{2} \right), \quad (6.68)$$

$$v_{2j} = \cos \left( \frac{\beta_j(\xi + 1)}{2} \right) - 1, \quad (6.69)$$

$$v_{3j} = \text{sen} \left( \frac{\beta_j(\xi - 1)}{2} \right) \quad (6.70)$$

e



$$v_{4j} = \cos\left(\frac{\beta_j(\xi - 1)}{2}\right) - 1, \quad (6.71)$$

sendo  $j = 1, 2, \dots, n_l$  onde  $n_l$  é o nível de enriquecimento utilizado e  $\beta_j$  pode ser prescrito ou avaliado como

$$\beta_j = \sqrt{\frac{\rho}{E}} L_e \mu_j, \quad (6.72)$$

onde  $\mu_j$  é a frequência associada ao nível de enriquecimento  $j$  e  $L_e$  é o comprimento do elemento finito. Estas funções de base são mostradas na FIGURA 6.8 para  $\beta = 3\pi/2$ .

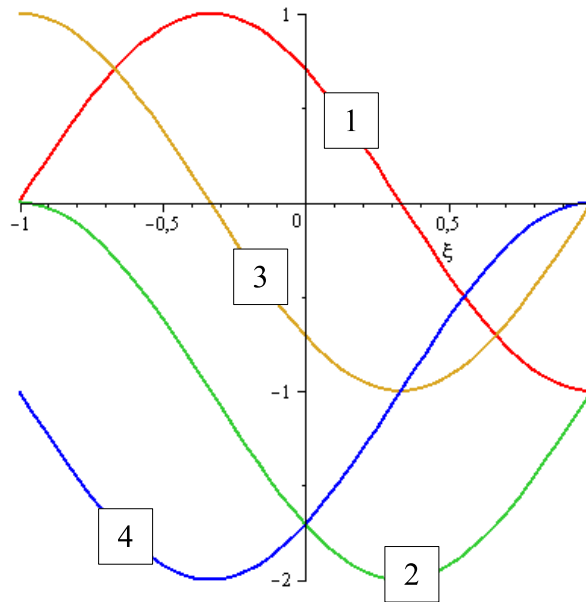


FIGURA 6.8 – FUNÇÕES DE BASE DADAS PELAS EQUAÇÕES (6.68)-(6.71) PARA  $\beta = \frac{3\pi}{2}$ .

As funções de aproximação locais são então obtidas multiplicando-se as funções de base pela PU. As funções de base da equação (6.68) e da equação (6.69) são provenientes da subcobertura à esquerda do elemento (ARNDT, 2009) e, portanto, a multiplicação pela PU resulta nas funções de aproximação locais

$$\psi_{1j} = \frac{1 - \xi}{2} \left[ \sin\left(\frac{\beta_j(\xi + 1)}{2}\right) \right] \quad (6.73)$$

e

$$\psi_{2j} = \frac{1 - \xi}{2} \left[ \cos\left(\frac{\beta_j(\xi + 1)}{2}\right) - 1 \right]. \quad (6.74)$$

Já as funções de base da equação (6.70) e da equação (6.71) são provenientes

da subcobertura à direita do elemento (ARNDT, 2009) e, portanto, a multiplicação pela PU resulta nas funções de aproximação locais

$$\psi_{3j} = \frac{1 + \xi}{2} \left[ \sin \left( \frac{\beta_j(\xi - 1)}{2} \right) \right] \quad (6.75)$$

e

$$\psi_{4j} = \frac{1 + \xi}{2} \left[ \cos \left( \frac{\beta_j(\xi - 1)}{2} \right) - 1 \right]. \quad (6.76)$$

Estas funções de aproximação locais são mostradas na FIGURA 6.9 para  $\beta = 3\pi/2$ .

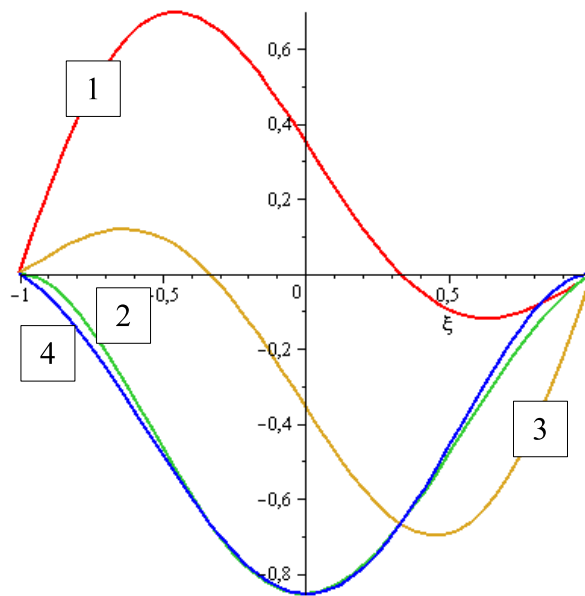


FIGURA 6.9 – FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO LOCAIS DADAS PELAS EQUAÇÕES (6.73)-(6.76) PARA  $\beta = \frac{3\pi}{2}$ .

O processo de obtenção destas funções de aproximação é descrito em detalhes por Arndt (2009).

As funções provenientes do MPU das equações (6.73)-(6.76) são também chamadas de funções de enriquecimento. São então incluídas na aproximação os polinômios lineares de Lagrange da equação (6.50) e da equação (6.51), gerando assim o espaço de aproximação do MEFG.

Assumindo as funções dadas pelas equações (6.73)-(6.76) como funções de aproximação locais,  $\beta_1 = \pi$ , por exemplo, e utilizando a equação (6.26) e a equação (6.47) as matrizes de rigidez e de massa de um dado elemento finito são

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & \frac{3+2\pi^2}{12} & \frac{3-\pi^2}{12} & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{2} \\ . & . & . & \frac{3+2\pi^2}{12} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{4} \\ . & \text{sim.} & . & . & -\frac{3+2\pi^2}{12} & \frac{21-\pi^2}{12} \\ . & . & . & . & . & -\frac{3+2\pi^2}{12} \end{bmatrix} \quad (6.77)$$

e

$$\mathbf{M}^e = \rho AL \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{\pi^2-4}{\pi^3} & -\frac{4}{\pi^3} & -\frac{\pi^2-6}{3\pi^2} & -\frac{1}{6} \\ . & \frac{1}{3} & \frac{4}{\pi^3} & -\frac{\pi^2-4}{\pi^3} & -\frac{1}{6} & -\frac{\pi^2-6}{3\pi^2} \\ . & . & \frac{2\pi^2-3}{12\pi^2} & -\frac{\pi^2+3}{12\pi^2} & -\frac{3\pi^2-16}{4\pi^3} & -\frac{4}{\pi^3} \\ . & . & . & \frac{2\pi^2-3}{12\pi^2} & \frac{4}{\pi^3} & \frac{3\pi^2-16}{4\pi^3} \\ . & \text{sim.} & . & . & \frac{2\pi^2-15}{4\pi^2} & \frac{\pi^2+3}{12\pi^2} \\ . & . & . & . & . & \frac{2\pi^2-15}{4\pi^2} \end{bmatrix}, \quad (6.78)$$

que são ambas matrizes simétricas.

### 6.5.1 A equivalência das funções de base modificadas

Para se construir funções de base que possibilitem a geração de funções de interpolação locais que se anulem nos nós e que sejam baseadas na solução analítica do problema, pode ser necessário somar  $+1$  ou  $-1$  às funções de base originais, como feito no trabalho de Arndt (2009). Porém, é necessário garantir que as funções de base modificadas possuam a mesma capacidade de aproximação das funções originais. Esta propriedade pode ser apresentada na forma do seguinte Lema.

**Lema 6.2** (Equivalência das funções de base modificadas). Uma série de Fourier da forma

$$u(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \{E_n \cos(k_n x) + F_n \sin(k_n x)\} \quad (6.79)$$

pode ser transformada em uma série da forma

$$u(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \{G_n [\cos(k_n x) + c_n] + H_n [\sin(k_n x) + d_n]\}. \quad (6.80)$$

*Demonstração.* A série dada pela equação (6.80) pode ser reescrita como

$$u(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \{G_n c_n + H_n d_n\} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \{G_n \cos(k_n x) + H_n \sin(k_n x)\}, \quad (6.81)$$

que é igual a série da equação (6.79) com

$$a_0 = b_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \{G_n c_n + H_n d_n\}, \quad (6.82)$$

$$E_n = G_n \text{ e } F_n = H_n.$$

□

O resultado do Lema 6.2 é importante pois indica que a série da equação (6.80) pode ser vista, na verdade, como a série da equação (6.79) escrita de uma forma diferente. Portanto, é de se esperar que estas duas séries obtenham interpolações e, portanto, aproximações iguais.

Nota-se que o Lema 6.2 só é válido quando as duas séries possuem os termos  $a_0$  e  $b_0$ , que são os termos constantes. Caso fossem utilizadas apenas as funções de base do MPU do tipo seno e cosseno, os termos constantes não seriam considerados. Para que isto ocorra é necessário inserir termos que façam o papel das constantes  $a_0$  e  $b_0$  das séries do Lema 6.2.

Uma das propriedades importantes das funções de aproximação do MEF lagrangeano de ordem  $k$  é que estas funções são sempre capazes de representar qualquer polinômio de ordem menor ou igual a  $k$  (BECKER et al., 1981). Como, por necessidade matemática, as aproximações para problemas de segunda ordem devem sempre pertencer ao espaço  $H^1$  (REDDY, 1998; ODEN; CAREY, 1983), então a aproximação dentro de um dado elemento finito lagrangeano será sempre de ordem maior ou igual a 1 e, portanto, será sempre capaz de reproduzir uma solução constante. Logo, as funções de aproximação locais do MEF lagrangeano são capazes de fazer o papel do termo constante de uma série como a mostrada no Lema 6.2.

Isto indica que as funções de base modificadas, obtidas somando-se ou subtraindo-se  $+1$  ou  $-1$ , e as funções de base originais devem gerar funções de forma com propriedades semelhantes, desde que sejam incluídas também as funções de aproximação do MEF lagrangeano. Como as funções de base originais compõem a solução analítica do problema é de se esperar que a aproximação utilizando-se estas funções seja bastante boa. Porém, a utilização de funções seno e cosseno como funções de base geram funções de aproximações locais que não se anulam nos nós, uma característica que é evitada no contexto deste trabalho. Já as funções de base modificadas são capazes de gerar funções de aproximações locais que se anulam nos

nós dos elementos.

De acordo com o Teorema 4.1, as funções de forma obtidas do MPU possuirão as mesmas propriedades de aproximação das funções de base utilizadas. Porém, isto não quer dizer que as funções de forma do MPU sejam capazes de reproduzir as mesmas soluções que seriam obtidas ao se utilizar as funções de base originais. Este fato fica bastante evidente no trabalho de Arndt (2009), onde as funções de forma do MMA são utilizadas como funções de base para o MPU, sendo que os resultados das duas abordagens não são iguais. Assim, ao somar ou subtrair 1 das funções de base, as funções de forma resultantes não serão capazes de reproduzir os resultados que seriam obtidos ao se utilizar as funções de base originais. O que se espera é que estas duas abordagens produzam funções de forma com propriedades de aproximação semelhantes.

### 6.5.2 Uma nota sobre a convergência monotônica dos resultados

A utilização de funções de forma polinomiais leva a uma série de importantes resultados teóricos. Um destes resultados diz respeito à convergência monotônica das aproximações quando a malha de elementos finitos é refinada (i.e. o número de elementos finitos é aumentado ou a ordem da aproximação polinomial é aumentada). Este comportamento do MEF é descrito em detalhes por Oden e Carey (1983), Reddy (1998), Ciarlet (1978).

Uma interpretação simples deste resultado está ilustrada na FIGURA 6.10. Neste caso, os espaços de aproximação  $V_1$  e  $V_2$  são construídos utilizando elementos polinomiais lineares. Porém, o espaço de aproximação  $V_2$  é construído dividindo-se o elemento finito utilizado para obter  $V_1$  em dois novos elementos. O espaço de aproximação  $V_2$  é capaz de reproduzir o espaço  $V_1$ , como indicado na FIGURA 6.10 e, portanto,  $V_1$  é um subespaço de  $V_2$ .

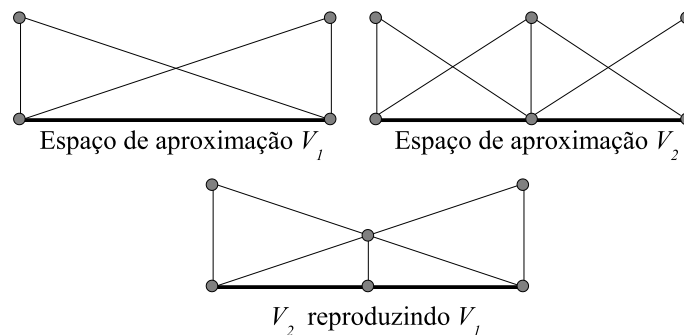


FIGURA 6.10 – DOIS ESPAÇOS DE APROXIMAÇÃO  $V_1$  E  $V_2$ .

Este raciocínio vale para aproximações polinomiais de qualquer ordem fixa

definidas em uma, duas ou três dimensões, desde que as malhas refinadas sejam obtidas subdividindo os elementos da malha original (CAREY; ODEN, 1983; REDDY, 1998; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000). Este resultado pode ser escrito como

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq V_3 \subseteq \dots \subseteq V_{n-1} \subseteq V_n, \quad (6.83)$$

onde  $V_2$  é construído subdividindo os elementos da malha utilizada para construir  $V_1$ ,  $V_3$  é construído subdividindo os elementos da malha utilizada para construir  $V_2$  e assim por diante.

Este resultado garante que cada vez que a malha do MEF for refinada dividindo-se os elementos finitos e mantendo-se a ordem da aproximação fixa, um procedimento conhecido como refino  $h$  (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000; REDDY, 1998; ODEN; CAREY, 1983; BATHE, 1996; HUGHES, 1987), o espaço de aproximação obtido com a malha refinada irá conter o espaço de aproximação obtido com a malha original.

O novo espaço de aproximação será capaz de reproduzir o espaço de aproximação anterior, caso necessário. Além disso, o novo espaço de aproximação irá incorporar informação nova, que será capaz de melhorar a aproximação em relação ao espaço de aproximação anterior. Esta propriedade garante que o refino  $h$  para o MEF polinomial gere uma sequência de resultados com convergência monotônica para os modos e frequências naturais de um dado problema.

Isto é, para uma sequência de malhas refinadas os erros para a aproximação de modos e frequências naturais são sempre reduzidos ou permanecem inalterados. Este resultado pode ser escrito como

$$e_{V_1} \geq e_{V_2} \geq e_{V_3} \geq \dots \geq e_{V_{n-1}} \geq e_{V_n} \quad (6.84)$$

onde  $e_{V_1}, e_{V_2}, \dots, e_{V_n}$  são os erros para os modos ou frequências naturais obtidos com uma sequência de espaços de aproximação refinados, como definido na equação (6.83). A equação (6.84) não vale para o caso da análise para resposta no tempo porque neste caso também estarão envolvidos os erros decorrentes do esquema de integração no tempo.

A convergência monotônica dos resultados quando a malha é refinada é um resultado muito importante para o MEF polinomial. Este resultado é válido sempre que as funções de aproximação formarem uma base completa para um espaço polinomial  $P_k$ , como no caso do MEF lagrangeano e do MEFH apresentado anteriormente.

A convergência monotônica dos resultados para um refino do tipo  $p$ , onde a discretização do domínio é mantida constante mas a ordem da aproximação polinomial é aumentada, é mais simples de ser analisada. Neste caso, ao aumentar a ordem da

aproximação de  $k$  para  $k + 1$ , o novo espaço de aproximação será capaz de reproduzir o espaço de aproximação anterior. Isto porque o espaço dos polinômios de ordem até  $k$  é um subespaço do espaço dos polinômios de ordem até  $k + 1$ . Assim, para o refino do tipo  $p$  a condição da equação (6.83) é automaticamente atendida, resultando na convergência monotônica dos resultados como mostrado na equação (6.84).

A condição da equação (6.83) para uma sequência de malhas refinadas não vale para o MEFG como proposto aqui. Dois elementos finitos que sejam obtidos da divisão de um elemento finito podem não serem capazes de reproduzir o espaço de aproximação gerado pelo elemento finito original. Isto porque as funções de forma obtidas com o MPU para o MEFG proposto aqui foram obtidas para um dado elemento e são alteradas quando o refino do tipo  $h$  é realizado. Consequentemente, o refino do tipo  $h$  não irá gerar uma sequência de espaços de aproximação que respeitem a condição da equação (6.83) e, portanto, a convergência monotônica dos resultados da equação (6.84) não é esperada.

É importante notar que esta é uma característica exclusiva do MEFG como proposto neste trabalho. É possível obter formulações do MEFG que respeitem a condição da equação (6.83) para o refino do tipo  $h$ , definindo as funções do MPU de forma independente dos elementos finitos. Porém, neste trabalho as funções do MPU são definidas dentro dos elementos de forma a simplificar a implementação computacional e a imposição das condições de contorno.

O refino do tipo  $p$  para o MEFG como proposto aqui pode ser realizado mantendo-se a discretização do domínio fixa e utilizando diferentes conjuntos de funções de forma do MPU, dados por diferentes valores do coeficiente  $\beta_k$ . Neste caso, o espaço de aproximação refinado irá conter o espaço de aproximação original, uma vez que serão mantidas todas as funções de forma do espaço original e acrescentadas as funções de forma para um valor de  $\beta_k$  diferente.

Assim, uma sequência de espaços de aproximação gerada pelo refino  $p$  do MEFG como proposto aqui respeita a condição dada pela equação (6.83). Portanto, a convergência monotônica dos resultados da equação (6.84) é garantida apenas para o refino do tipo  $p$  para o MEFG proposto neste trabalho.

Apesar da convergência monotônica dos resultados não ser garantida para o refino  $h$  do MEFG proposto, o método continua sendo convergente. Ou seja, os erros para as frequências e modos de vibração podem ser reduzidos para valores arbitrariamente pequenos, refinando-se a malha. Isto ocorre porque o espaço de aproximação do MEFG incorpora o espaço polinomial do MEF linear padrão. Assim, a garantia de convergência dos resultados quando o tamanho dos elementos finitos tende a zero é herdada do MEF padrão.

Mesmo que a convergência monotônica dos resultados não seja garantida para

o MEFG como proposto aqui quando o refino  $h$  é realizado, os exemplos demonstram que o método é vantajoso em diversas situações, principalmente para a aproximação de autovalores de magnitudes mais elevadas. Além disso, os resultados apresentados nesta seção indicam que o MEFG como proposto neste trabalho é mais adequado para refino do tipo  $p$ .

## 6.6 ESTRUTURAS TRELIÇADAS

Para obter as equações de equilíbrio para um elemento finito de treliça, que pode estar orientado em uma direção qualquer no espaço, como aquele mostrado na FIGURA 6.11, é necessário aplicar uma regra de transformação de coordenadas (RAO, 1995).

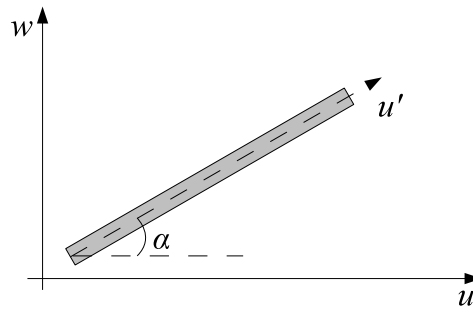


FIGURA 6.11 – BARRA INCLINADA.

Para um elemento finito linear vale a seguinte transformação de coordenadas:

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{bmatrix}, \quad (6.85)$$

onde os subíndices 1 e 2 representam os nós inicial e final da barra,  $u'$  são deslocamentos axiais no sistema local de coordenadas do elemento,  $u$  e  $w$  são deslocamentos horizontais e verticais no sistema global de coordenadas e  $\alpha$  é a inclinação da barra com a horizontal.

A transformação de coordenadas para o MEFH e o MEFG segue o procedimento demonstrado por Zeng (1998a) para o MC. Como as funções de enriquecimento do MEFH e do MEFG se anulam nos nós do elemento, a transformação de coordenadas é dada por



$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad (6.86)$$

onde  $c'$  são os graus de liberdade de enriquecimento no sistema de coordenadas local do elemento e  $c$  são os graus de liberdade de enriquecimento no sistema de coordenadas global. Ou seja, os graus de liberdade de enriquecimento no sistema local são iguais aos graus de liberdade no sistema global e, portanto, não precisam ser transformados.

## 6.7 ASPECTOS DE IMPLEMENTAÇÃO

As rotinas computacionais utilizadas para as análises foram implementadas no programa MATLAB (MATHWORKS, 2011), que utiliza a representação de números através do sistema de precisão dupla (QUARTERONI et al., 2007). A rotina utilizada para a solução do problema de autovalores e autovetores generalizado é baseada no Método de Lanczos (HUGHES, 1987; BATHE, 1996; CAREY; ODEN, 1984). O programa calcula no máximo os  $n - 1$  primeiros pares de autovalores e autovetores, onde  $n$  é a ordem do problema. Por este motivo, a última frequência de vibração dos exemplos não são apresentadas. Além disso, a tolerância utilizada para a aproximação dos autovetores é igual a  $10^{-10}$ .

As matrizes de rigidez, de massa e o vetor de forças foram obtidos realizando integração analítica mediante o programa de manipulação simbólica Maple (MAPLESOFT, 2009). Assim, a integração numérica não é abordada neste capítulo. Além disso, as matrizes foram geradas para um elemento composto por 14 funções de forma. Quando um número menor de funções de forma é utilizado, então o algoritmo emprega apenas a parcela correspondente das matrizes de rigidez, de massa e do vetor de forças.

É importante notar que as rotinas relativas ao MEFH polinomial e ao MEFG são, em sua forma final, muito semelhantes. A única diferença diz respeito às matrizes de rigidez, de massa e o vetor de forças. As operações de imposição de condições de contorno e pós-processamento são idênticas. Todas as rotinas relativas à análise dinâmica também são as mesmas. Isto ocorre porque as funções do MPU utilizadas no MEFG foram construídas de forma a se anularem nos nós dos elementos, como ocorre para o MEFH polinomial.

## 6.8 RESULTADOS

É importante ressaltar que neste capítulo são considerados apenas os deslocamentos longitudinais, orientados na direção do eixo das barras. Não são considerados deslocamentos transversais ao eixo das barras, como ocorre para o caso de vigas, descrito no próximo capítulo.

Em nenhum exemplo deste trabalho é considerado o amortecimento da estrutura. Além disso, o número de graus de liberdade de um dado problema é contabilizado antes da imposição das condições de contorno, a não ser quando especificado o contrário.

Resultados pertinentes a taxas de convergência para a aproximação das frequências naturais para barras são descritos em detalhes por Arndt (2009) e, portanto, não são apresentados aqui.

### 6.8.1 Exemplo 1: barra sujeita a deslocamentos iniciais

O primeiro exemplo estudado é aquele da barra fixa nas duas extremidades e sujeita a deslocamentos iniciais, mostrada na FIGURA 6.12. As propriedades do material foram escolhidas de forma que a velocidade de propagação da onda seja igual a  $c = \sqrt{E/\rho} = 1\text{m/s}$  e o comprimento da barra é igual a 1m. O campo de deslocamentos iniciais apresenta valor máximo  $u_{max} = 0,25\text{m}$  no meio da barra e possui variação linear até os extremos, onde os deslocamentos são nulos. Estes deslocamentos podem ser obtidos aplicando-se uma força de intensidade unitária no meio da barra. Por fim, não há forças agindo na barra e as velocidades iniciais são nulas.

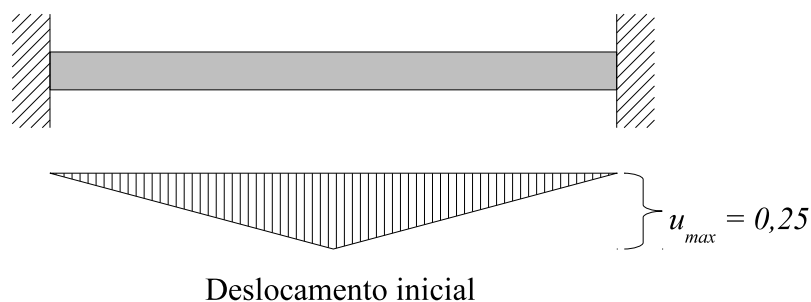


FIGURA 6.12 – EXEMPLO 1: BARRA SUJEITA A DESLOCAMENTOS INICIAIS.

Este problema é regido pela seguinte equação diferencial parcial (TIMOSHENKO; GOODIER, 1951):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \forall x \in [0, 1], \quad (6.87)$$

com condições de contorno e iniciais

$$\begin{cases} u(x=0, t) = u(x=1, t) = 0 \\ u(x < 0, 5, t=0) = \frac{x}{2} \\ u(x \geq 0, 5, t=0) = \frac{1-x}{2} \\ \frac{\partial u(x, t=0)}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (6.88)$$

A equação (6.87) é a equação da onda para  $c = 1\text{m/s}$ . A solução analítica deste problema pode ser obtida através da separação de variáveis, representando as condições iniciais através de uma série de Fourier (DUFFY, 1998; KREYSZIG, 2006).

Este exemplo é estudado inicialmente utilizando-se o Método da Superposição Modal para um intervalo de tempo de 20s e utilizando-se 11 graus de liberdade antes da imposição das condições de contorno. As equações resultantes do Método da Superposição Modal foram resolvidas pelo Método de Newmark (com  $\alpha = 0,5$  e  $\delta = 0,25$ ) com um passo de tempo  $\Delta t = 2,5 \times 10^{-3}\text{s}$ .

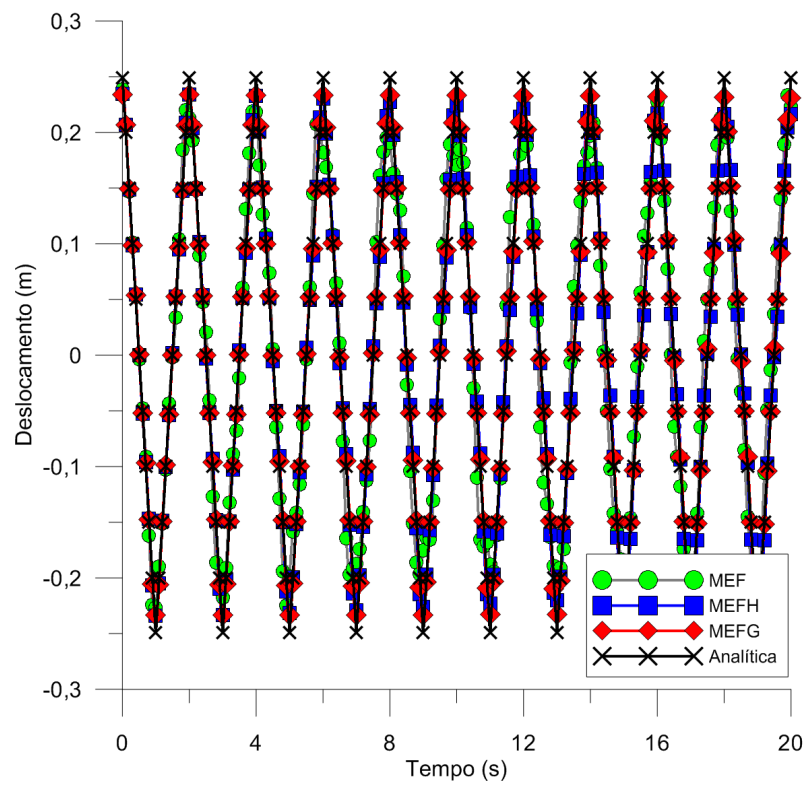
A malha utilizada para o MEF linear é composta por 10 elementos finitos. Para o MEFH polinomial, a malha é composta por 2 elementos finitos de quinta ordem, com 6 funções de aproximação cada um. A malha utilizada para o MEFG é composta de 2 elementos finitos com 4 funções de enriquecimento e  $\beta_1 = 3\pi/2$ . A solução analítica e as soluções aproximadas em  $x = 0,5\text{m}$  são mostradas na FIGURA 6.13, considerando 5 modos de vibração no Método da Superposição Modal.

Os erros obtidos de acordo com a equação (5.7) para diferentes números de modos incluídos no Método da Superposição Modal são apresentados na TABELA 6.1. Os erros obtidos considerando apenas o primeiro modo são apresentados na primeira coluna, os erros obtidos considerando os dois primeiros modos são apresentados na segunda coluna e assim por diante. Estes erros são também apresentados na FIGURA 6.14.

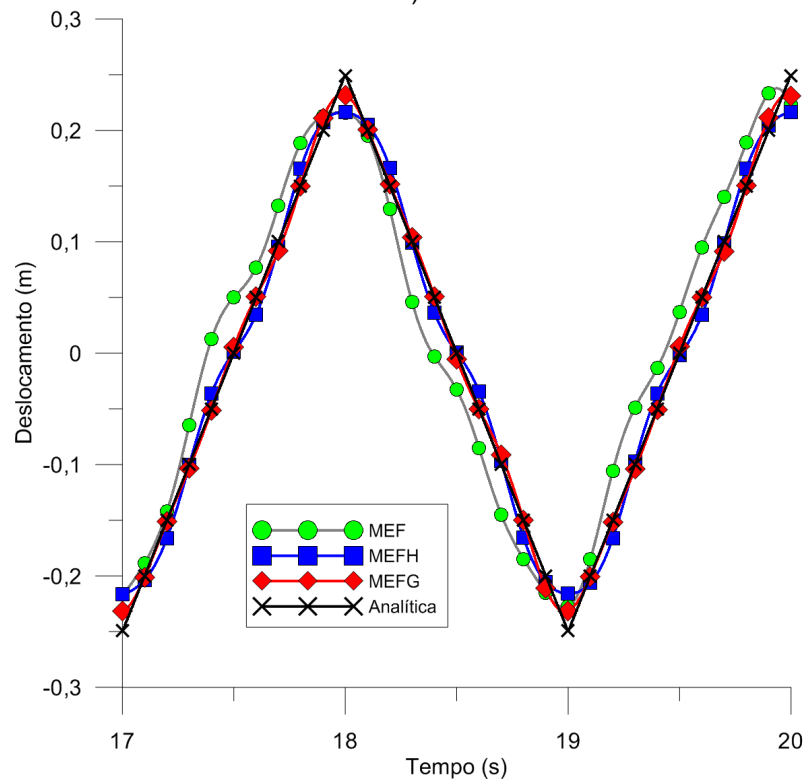
TABELA 6.1 – EXEMPLO 1: ERROS (m.s) OBTIDOS COM 11 GRAUS DE LIBERDADE PARA DIFERENTES NÚMEROS DE MODOS INCLUÍDOS NO MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL.

MODOS	1	2	3	4	5	6	7	8
MEF	0,4560	0,4560	0,5119	0,5119	0,5231	0,5231	0,5271	0,5271
MEFH	0,2931	0,2931	0,1114	0,1114	0,1565	0,1565	0,1611	0,1611
MEFG	0,2931	0,2931	0,1112	0,1112	0,0732	0,0732	0,0865	0,0865

Pode-se notar, da TABELA 6.1 e da FIGURA 6.14, que os melhores resultados não foram obtidos considerando-se todos os modos de vibração da estrutura. Esta é uma



a)



b)

FIGURA 6.13 – EXEMPLO 1: DESLOCAMENTOS NO MEIO DA BARRA OBTIDOS COM 11 GRAUS DE LIBERDADE E 5 MODOS DE VIBRAÇÃO PARA a) INTERVALO DE TEMPO 0 – 20s E b) 17 – 20s.

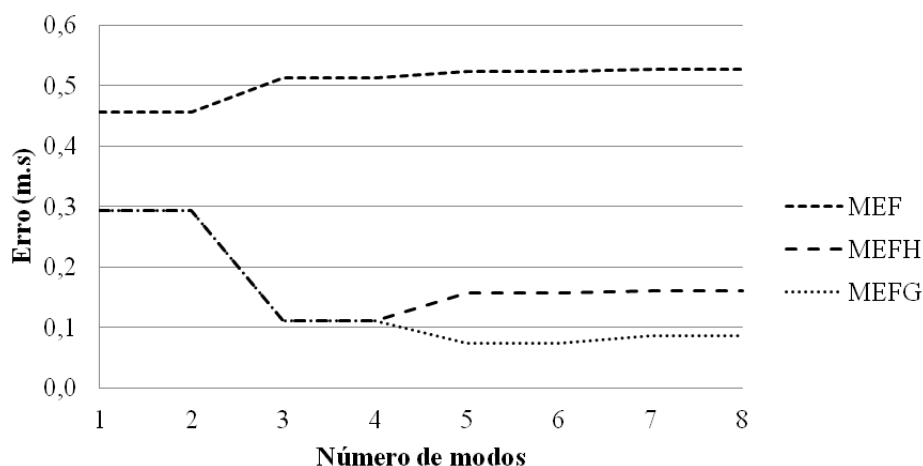


FIGURA 6.14 – EXEMPLO 1: ERROS OBTIDOS COM 11 GRAUS DE LIBERDADE PARA DIFERENTES NÚMEROS DE MODOS INCLUÍDOS NO MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL.

tendência geral quando se lida com o Método da Superposição Modal porque os modos de vibração com frequências mais altas são aproximados com menor precisão pelo MEF, como demonstrado na Seção 6.3.1. Consequentemente, a inclusão dos modos de vibração com frequências mais elevadas no Método da Superposição Modal pode reduzir a precisão da solução aproximada.

De acordo com a TABELA 6.1 e a FIGURA 6.14, os melhores resultados foram obtidos com o MEFG considerando 5 ou 6 modos de vibração. Os melhores resultados obtidos com o MEFH polinomial foram obtidos com 3 ou 4 modos. Já os resultados obtidos com o MEF linear são menos precisos em comparação com aqueles obtidos pelo MEFG e o MEFH.

Este comportamento é confirmado pelos deslocamentos apresentados na FIGURA 6.13. Além disso, a inclusão do quinto modo de vibração foi capaz de melhorar a solução obtida com o MEFG, mas piorou a solução obtida no caso do MEFH. Isto indica que os modos de vibração com frequências mais altas foram melhores aproximados pelo MEFG.

Os resultados obtidos com 1 ou 2, 3 ou 4, 5 ou 6 e 7 ou 8 modos de vibração são iguais porque a solução do problema estudado é simétrica. Porém, os modos de vibração de número par neste exemplo são modos de vibração anti simétricos. Assim, A inclusão dos modos de vibração de número par não altera os resultados, uma vez que os modos de vibração anti simétricos não participam da solução simétrica.

Estes resultados podem ser estudados mais detalhadamente ao se analisar as frequências naturais do problema. As frequências naturais deste exemplo podem ser obtidas por separação de variáveis (DUFFY, 1998; KREYSZIG, 2006) e são

$$\omega_n = \frac{nc\pi}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (6.89)$$

onde  $\omega_n$  é a  $n$ -ésima frequência natural de vibração,  $c$  é a velocidade de propagação da onda e  $L$  é o comprimento da barra. O erro percentual entre uma frequência aproximada e uma frequência natural pode ser definido como

$$e(\%) = \frac{\omega_h - \omega}{\omega} (100\%), \quad (6.90)$$

onde  $\omega_h$  é a frequência aproximada e  $\omega$  é a frequência natural de vibração exata.

Os erros percentuais obtidos com o MEFH, o MEFG e o MEF linear com 11 graus de liberdade são mostrados na TABELA 6.2 e Na FIGURA 6.15.

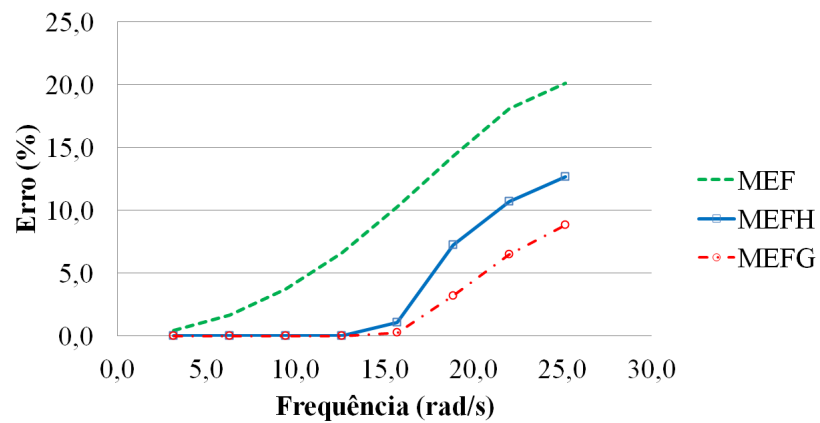
TABELA 6.2 – EXEMPLO 1: ERROS PERCENTUAIS (%) DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM 11 GRAUS DE LIBERDADE.

MODO	FREQ. (rad/s)	MEFH	MEFG	MEF
1	3,141593	2,34E-04	3,42E-03	4,11E-01
2	6,283185	2,34E-04	3,42E-03	1,65E+00
3	9,424778	1,61E-02	2,34E-04	3,73E+00
4	12,566371	2,97E-02	1,83E-03	6,63E+00
5	15,707963	1,08E+00	2,73E-01	1,03E+01
6	18,849556	7,23E+00	3,23E+00	1,43E+01
7	21,991149	1,07E+01	6,50E+00	1,81E+01
8	25,132741	1,27E+01	8,82E+00	2,01E+01

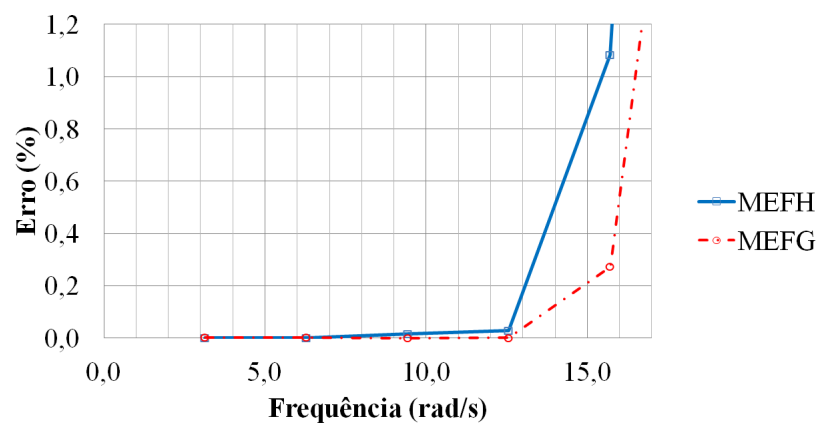
De forma geral, os erros percentuais obtidos com o MEFH e o MEFG são muito menores do que aqueles obtidos com o MEF linear. Além disso, as duas primeiras frequências foram aproximadas com maior precisão pelo MEFH, enquanto que todas as demais frequências foram aproximadas com maior precisão pelo MEFG. Porém, a aproximação das frequências mais baixas são geralmente precisas e, portanto, não constituem um problema grave nem mesmo para o MEF linear. Note que a aproximação obtida para a primeira frequência pelo MEF linear é razoavelmente boa. Assim, pode-se concluir que com o MEFG é possível obter uma maior gama de frequências naturais com erros pequenos em comparação com o MEFH.

Da FIGURA 6.15b pode-se notar que a quinta frequência natural de vibração foi muito melhor aproximada pelo MEFG do que pelo MEFH. Isto explica porque, na análise pelo Método da Superposição Modal, a inclusão do quinto modo de vibração degradou a solução no caso do MEFH.

O mesmo problema foi também estudado utilizando-se 19 graus de liberdade antes da imposição das condições de contorno. A malha utilizada no caso do MEF linear é composta de 18 elementos finitos. A malha utilizada no caso do MEFH polinomial é



a)



b)

FIGURA 6.15 – EXEMPLO 1: ERROS PERCENTUAIS DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM 11 GRAUS DE LIBERDADE, PARA a) AS 8 PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS NATURAIS E b) AS FREQUÊNCIAS COM ERRO ATÉ 1,2%.

composta de 2 elementos de ordem 9, com 10 funções de aproximação cada um. No caso do MEFG foram utilizados 2 elementos com 8 funções de enriquecimento, obtidas com  $\beta_1 = 3\pi/2$  e  $\beta_2 = 3\pi$ . Os erros para estes casos são apresentados na TABELA 6.3 e na FIGURA 6.16.

TABELA 6.3 – EXEMPLO 1: ERROS (m.s) OBTIDOS COM 19 GRAUS DE LIBERDADE PARA DIFERENTES NÚMEROS DE MODOS INCLUÍDOS NO MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL.

MODOS	1	2	3	4	5	6	7	8
MEF	0,3028	0,3028	0,2644	0,2644	0,2816	0,2816	0,2880	0,2880
MEFH	0,2931	0,2931	0,1113	0,1113	0,0599	0,0599	0,0384	0,0384
MEFG	0,2931	0,2931	0,1113	0,1113	0,0599	0,0599	0,0384	0,0384
MODOS	9	10	11	12	13	14	15	16
MEF	0,2903	0,2903	0,2915	0,2915	0,2919	0,2919	0,2925	0,2925
MEFH	0,0353	0,0353	0,0404	0,0404	0,0547	0,0547	0,0550	0,0550
MEFG	0,0278	0,0278	0,0357	0,0357	0,0470	0,0470	0,0475	0,0475

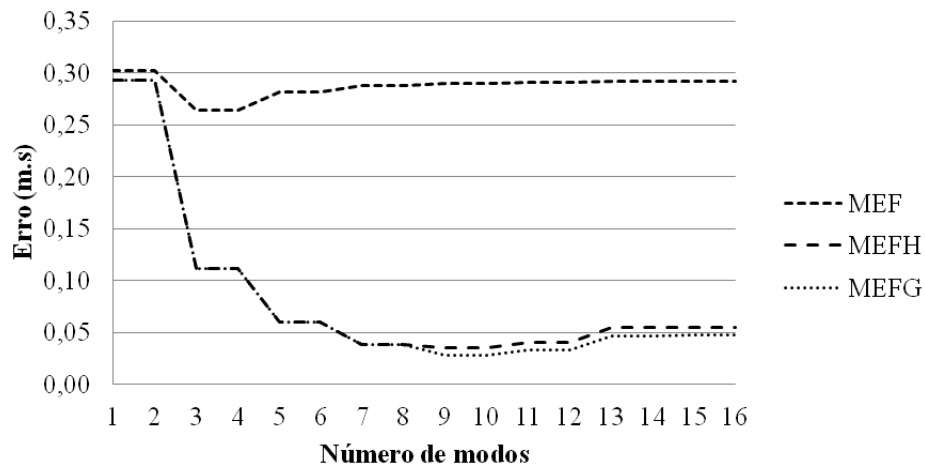


FIGURA 6.16 – EXEMPLO 1: ERROS OBTIDOS COM 19 GRAUS DE LIBERDADE PARA DIFERENTES NÚMEROS DE MODOS INCLUÍDOS NO MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL.

Como esperado, os erros foram reduzidos quando o número de graus de liberdade foi aumentado. Os melhores resultados foram obtidos com o MEFG com 9 ou 10 modos de vibração. Porém, os erros obtidos com o MEFG e o MEFH polinomial são agora muito semelhantes. Os resultados obtidos com o MEF linear, por outro lado, são menos precisos do que aqueles obtidos com o MEFG e o MEFH.

#### 6.8.2 Exemplo 2: barra sujeita a força harmônica

O segundo exemplo é aquele da barra fixa em uma extremidade e sujeita a uma força harmônica na outra extremidade, como mostrado na FIGURA 6.17. As propriedades do material foram escolhidas de forma que a velocidade de propagação da onda seja  $c =$



$\sqrt{E/\rho} = 1\text{m/s}$  e o comprimento da barra é igual a 1m. Os deslocamentos e as velocidades iniciais são iguais a zero, ou seja, a barra encontra-se inicialmente em repouso.

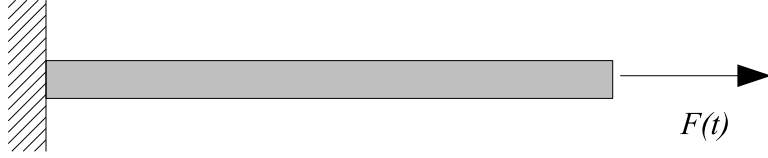


FIGURA 6.17 – EXEMPLO 2: BARRA SUJEITA A FORÇA HARMÔNICA.

Para uma força dada por

$$F(t) = f \sin(\omega t), \quad (6.91)$$

o problema é regido pela equação (6.87) com condições de contorno e iniciais

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x=0, t) = 0 \\ \frac{\partial u(x=1, t)}{\partial x} = f \sin(\omega t) \\ u(x, t=0) = 0 \\ \frac{\partial u(x, t=0)}{\partial t} = 0 \end{array} \right. , \quad (6.92)$$

A solução analítica deste problema é mais difícil de se obter do que a do exemplo anterior porque a condição de contorno em  $x = 1$ , que representa a força harmônica, é não homogênea. O problema pode ser resolvido através de técnicas descritas por Pinchover e Rubinstein (2005) e é reproduzida aqui pois não foi encontrada em outras fontes. Para uma velocidade de propagação  $c$ , os deslocamentos são dados por

$$u(x, t) = f x \sin(\omega t) + f \sum_{i=1}^{\infty} \{ \sin(k_n x) [C_n \sin(k_n c t) + B_n(t)] \}, \quad (6.93)$$

onde

$$C_n = -\frac{A_n \omega}{k_n c}, \quad (6.94)$$

$$B_n(t) = \frac{A_n \omega^2 \sin(\omega t)}{c^2 k_n^2 - \omega^2} - \frac{A_n \omega^3 \sin(k_n c t)}{c^3 k_n^3 - c k_n \omega^2}, \quad (6.95)$$

$$A_n = -\frac{2[k_n \cos(k_n) - \sin(k_n)]}{k_n^2} \quad (6.96)$$

e

$$k_n = \pi \left( n - \frac{1}{2} \right). \quad (6.97)$$

Este problema foi resolvido numericamente para uma excitação dada pela equação (6.91) com frequência  $\omega = 20\text{rad/s}$  e  $f = 1\text{N/m}^2$ . A análise foi feita utilizando o Método da Superposição Modal para um intervalo de tempo de 20s. As equações resultantes do Método da Superposição Modal foram resolvidas pelo Método de Newmark (com  $\alpha = 0,5$  e  $\delta = 0,25$ ) com um passo de tempo  $\Delta t = 1,25 \times 10^{-3}\text{s}$ . A solução analítica em cada passo de tempo foi calculada truncando-se a série da equação (6.93) após o termo de número 500.

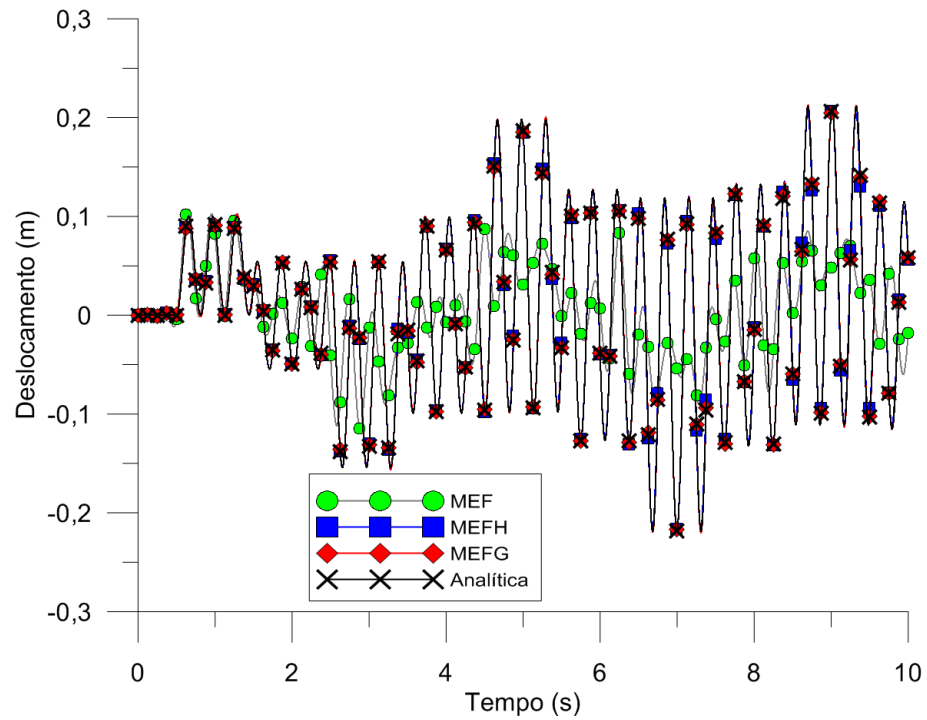
Neste exemplo foram utilizados 21 graus de liberdade antes da imposição das condições de contorno. A malha do MEF linear é composta de 20 elementos finitos, enquanto a malha do MEFH polinomial é composta de 4 elementos finitos de ordem 5. A malha utilizada pelo MEFG é composta de 4 elementos finitos com 4 funções de enriquecimento e  $\beta_1 = 3\pi/2$ . As soluções aproximadas em  $x = 0,5\text{m}$ , obtidas com 10 modos de vibração no Método da Superposição Modal, são mostradas na FIGURA 6.18.

Os erros para este exemplo são apresentados na TABELA 6.4 e na FIGURA 6.19. A FIGURA 6.19a mostra os erros para todos os casos testados enquanto a FIGURA 6.19b mostra os erros apenas para os casos que obtiveram menores erros.

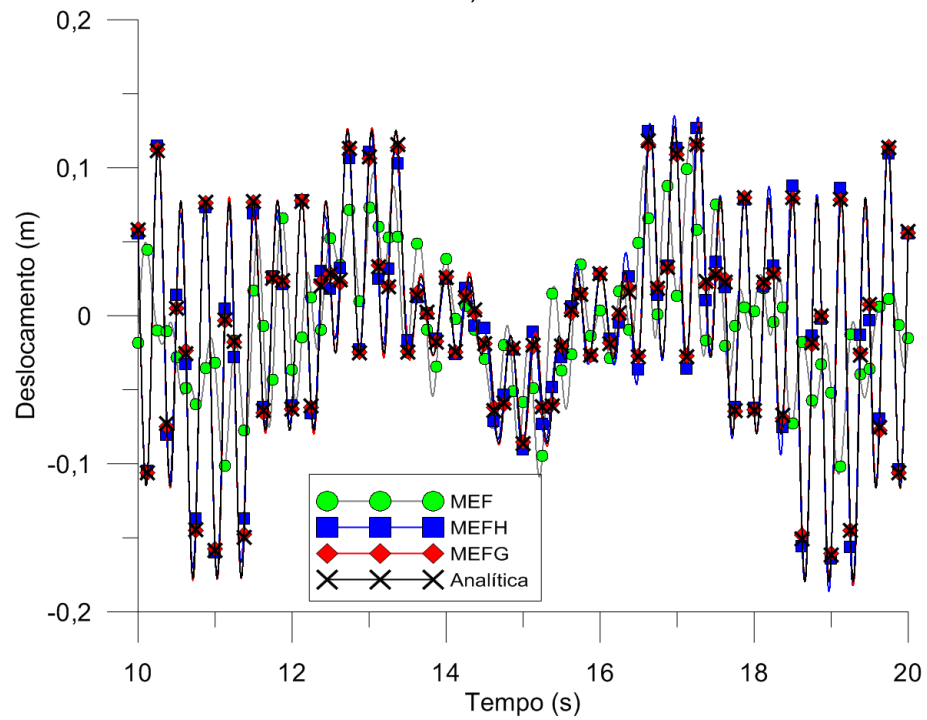
O melhor resultado foi obtido com o MEFG utilizando 10 modos de vibração e corresponde a um erro de 0,0258m.s. O melhor resultado obtido com o MEFH polinomial também foi obtido com 10 modos de vibração, mas neste caso o erro foi de 0,0722m.s. Os resultados obtidos com o MEF linear foram menos precisos que aqueles obtidos pelos outros dois métodos.

TABELA 6.4 – EXEMPLO 2: ERROS (m.s) OBTIDOS COM 21 GRAUS DE LIBERDADE PARA DIFERENTES NÚMEROS DE MODOS INCLUÍDOS NO MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL.

MODOS	1	2	3	4	5	6	7
MEF	1,1813	1,1823	1,2071	1,1772	1,1407	1,2813	1,1676
MEFH	1,1813	1,1820	1,2042	1,1661	1,1259	1,1876	0,1651
MEFG	1,1813	1,1820	1,2042	1,1661	1,1259	1,1876	0,1592
MODOS	8	9	10	11	12	13	14
MEF	1,1948	1,2150	1,2019	1,1931	1,2000	1,2068	1,2010
MEFH	0,0778	0,0891	0,0772	0,0817	0,0801	0,0817	0,0802
MEFG	0,0530	0,0498	0,0258	0,0379	0,0320	0,0346	0,0328
MODOS	15	16	17	18	19		
MEF	1,1964	1,2006	1,2048	1,2005	1,1968		
MEFH	0,0801	0,0801	0,0889	0,0812	0,0843		
MEFG	0,0339	0,0335	0,0446	0,0351	0,0435		

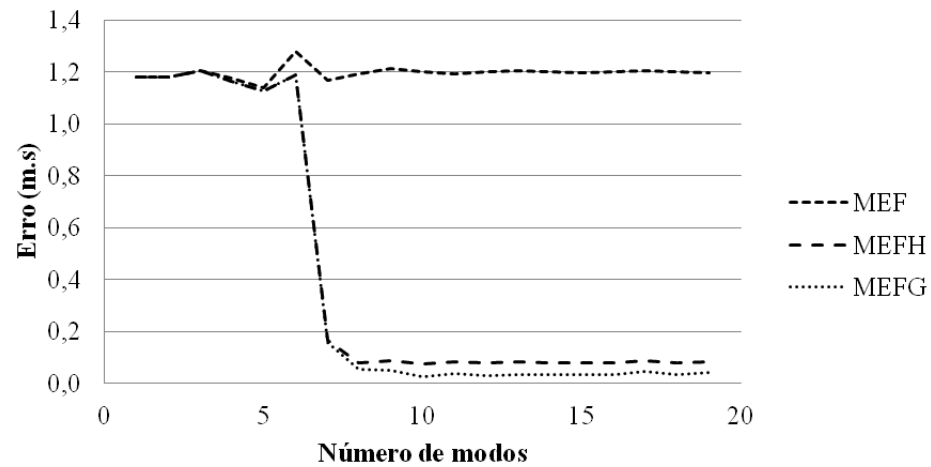


a)

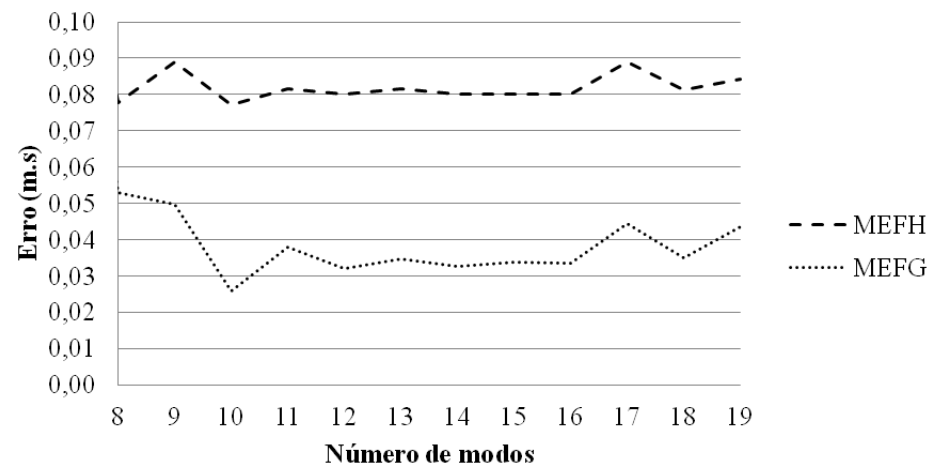


b)

FIGURA 6.18 – EXEMPLO 2: DESLOCAMENTOS NO MEIO DA BARRA OBTIDOS COM 21 GRAUS DE LIBERDADE E 10 MODOS DE VIBRAÇÃO PARA a) INTERVALO DE TEMPO 0 – 10s E b) 10 – 20s.



a)



b)

FIGURA 6.19 – EXEMPLO 2: ERROS OBTIDOS COM 21 GRAUS DE LIBERDADE PARA DIFERENTES NÚMEROS DE MODOS INCLUÍDOS NO MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL.

Uma inspeção mais detalhada da FIGURA 6.18 revela que os deslocamentos obtidos pelo MEFH e pelo MEFG no intervalo 0-15s são bastante semelhantes à solução analítica. Porém, os resultados obtidos com o MEFH para o intervalo 15-20s apresentam alguns desvios em relação à solução analítica, principalmente para picos de deslocamentos. A solução obtida com o MEFG, por outro lado, é bastante semelhante à solução analítica para todo o intervalo de tempo analisado.

A diferença de precisão entre o MEFH e o MEFG não fica clara ao se analisar apenas a FIGURA 6.19a, pois ambos os métodos obtiveram erros muito menores do que aqueles obtidos pelo MEF linear. Porém, ao se analisar os erros para os casos que obtiveram os menores erros, como mostrado na FIGURA 6.19b, nota-se que os erros do MEFG foram bastante inferiores aos obtidos pelo MEFH polinomial.

As frequências de vibração natural deste exemplo podem ser obtidos por separação de variáveis (DUFFY, 1998; KREYSZIG, 2006) e são

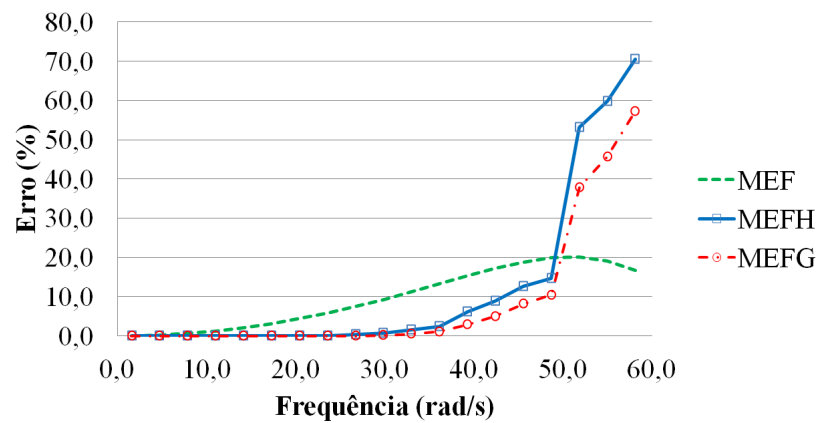
$$\omega_n = \frac{nc\pi}{2L} \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (6.98)$$

Os erros percentuais das frequências naturais obtidos com o MEFH, o MEFG e o MEF linear com 21 graus de liberdade são mostrados na TABELA 6.5 e na FIGURA 6.20.

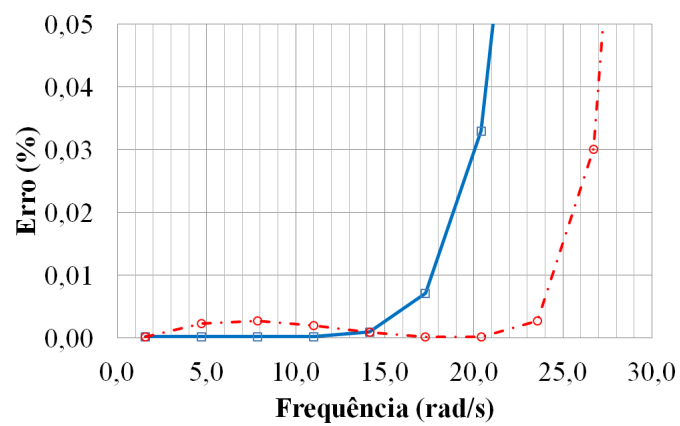
TABELA 6.5 – EXEMPLO 2: ERROS PERCENTUAIS (%) DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM 21 GRAUS DE LIBERDADE.

MODO	FREQ. (rad/s)	MEFH	MEFG	MEF
1	1,570796	2,34E-04	2,34E-04	2,57E-02
2	4,712389	2,34E-04	2,36E-03	2,32E-01
3	7,853982	2,34E-04	2,78E-03	6,43E-01
4	10,995574	2,34E-04	2,05E-03	1,26E+00
5	14,137167	9,41E-04	9,41E-04	2,09E+00
6	17,278760	7,18E-03	2,34E-04	3,13E+00
7	20,420352	3,30E-02	2,34E-04	4,38E+00
8	23,561945	1,13E-01	2,78E-03	5,83E+00
9	26,703538	3,20E-01	3,02E-02	7,48E+00
10	29,845130	7,47E-01	1,46E-01	9,30E+00
11	32,986723	1,52E+00	4,69E-01	1,13E+01
12	36,128316	2,50E+00	1,11E+00	1,33E+01
13	39,269908	6,23E+00	2,86E+00	1,53E+01
14	42,411501	8,91E+00	5,02E+00	1,73E+01
15	45,553093	1,26E+01	8,15E+00	1,89E+01
16	48,694686	1,46E+01	1,05E+01	1,99E+01
17	51,836279	5,31E+01	3,79E+01	2,01E+01
18	54,977871	5,98E+01	4,56E+01	1,91E+01
19	58,119464	7,05E+01	5,72E+01	1,68E+01

Neste caso, as 4 primeiras frequências naturais foram obtidos com maior precisão com o MEFH polinomial. Porém, estes são justamente as frequências cujos



a)



b)

FIGURA 6.20 – EXEMPLO 2: ERROS PERCENTUAIS DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM 21 GRAUS DE LIBERDADE, PARA a) TODAS AS FREQUÊNCIAS NATURAIS E b) AS FREQUÊNCIAS COM ERRO ATÉ 0,05%.

erros são muito pequenos também para o MEFG. As últimas 3 frequências foram aproximadas mais precisamente pelo MEF linear. Todas as demais frequências foram obtidas com maior precisão pelo MEFG. Isto indica que o MEFG é capaz de obter uma maior gama de frequências com maior precisão. Da FIGURA 6.20 nota-se, por exemplo, que a faixa de frequências com precisão maior do que 0,01% é bastante maior para o MEFG do que para o MEFH polinomial.

Quando o Método da Superposição Modal é utilizado, é possível melhorar os resultados excluindo-se da análise os modos mais altos, pois estes são aproximados com menor precisão (ODEN; CAREY, 1983; BATHE, 1996). Este fato pode ser observado nos exemplos anteriores. Porém, quando métodos de integração direta são utilizados não é possível escolher quais modos serão incluídos na análise.

De acordo com Bathe (1996), os métodos de integração direta gerariam os mesmo resultados que seriam obtidos com o Método da Superposição Modal caso todos os modos de vibração fossem incluídos na análise. Os erros gerados pelos modos de vibração mais altos devem então ser reduzidos utilizando-se passos de tempo apropriados ou algum tipo de amortecimento numérico (HUGHES, 1987; BATHE, 1996).

Neste contexto, o amortecimento numérico ocasionado por alguns esquemas de integração no tempo (note que nem todos os métodos de integração no tempo ocasionam amortecimento numérico) podem ser benéficos. Isto porque a influência dos modos mais altos de vibração, que são aproximados com pouca precisão, podem ser amortecidos na análise.

O Método de Houbolt, por exemplo, gera naturalmente amortecimento numérico para os modos mais altos, mas o analista não é capaz de controlar a magnitude deste amortecimento (HUGHES, 1987; BATHE, 1996). Alguns esquemas de integração que incluem amortecimento numérico e possibilitam ao analista controlar a magnitude deste amortecimento são o Método  $\alpha$ -HHT (HILBER et al., 1977; HUGHES, 1987) e o Método  $\alpha$ -Generalizado (CHUNG; HULBERT, 1993). Neste trabalho foi utilizado o Método de Newmark, que não ocasiona amortecimento numérico (HUGHES, 1987; BATHE, 1996), pois busca-se avaliar a capacidade do MEFH e do MEFG em aproximar os modos mais altos de vibração da estrutura.

### 6.8.3 Exemplo 3: treliça sujeita a força harmônica

O terceiro exemplo estudado é aquele da treliça mostrada na FIGURA 6.21, que está sujeita a uma força harmônica e possui deslocamentos e velocidades iniciais nulos. Neste caso não é possível aumentar o número de graus de liberdade com o MEF linear, pois cada barra não pode ser dividida em duas sem ocasionar uma estrutura instável. Com

o MEFH e o MEFG, por outro lado, é possível aumentar o número de graus de liberdade aumentando-se o número de funções de aproximação em cada elemento.

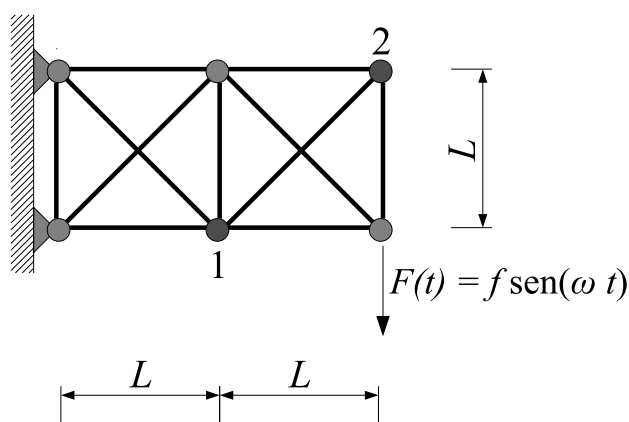


FIGURA 6.21 – EXEMPLO 3: TRELIÇA SUJEITA A DESLOCAMENTOS INICIAIS.

Todas as barras possuem:  $E = 210\text{GPa}$ ,  $A = 0,05\text{m}^2$  e  $\rho = 8000\text{kg/m}^3$ . A distância  $L$  é igual a 3m. O exemplo foi resolvido para uma força de magnitude  $f = 1\text{kN}$  e três frequências de excitação:  $\omega = 5000\text{rad/s}$ ,  $\omega = 7500\text{rad/s}$  e  $\omega = 10000\text{ rad/s}$ . A solução analítica deste problema não é conhecida pelo autor e portanto o problema foi resolvido apenas por métodos aproximados.

É importante ressaltar que este exemplo não foi concebido respeitando-se as relações entre áreas das barras e carregamentos aplicados comumente observadas na prática. Porém, o exemplo ilustra o comportamento do MEFH e do MEFG no caso de estruturas treliçadas.

O problema foi resolvido com o Método de Newmark (com  $\alpha = 0,5$  e  $\delta = 0,25$ ) com um passo de tempo de  $1,0 \times 10^{-5}\text{s}$ . Cinco discretizações diferentes foram utilizadas: a) MEF com elementos lineares, b) MEFH com 6 funções de aproximação por elemento (quinta ordem), c) MEFG com 6 funções de aproximação por elemento, d) MEFH com 10 funções de aproximação por elemento (nona ordem) e e) MEFG com 10 funções de aproximação por elemento. As barras da estrutura foram modeladas com apenas um elemento finito cada uma. No caso do MEFG as funções de enriquecimento foram obtidas com  $\beta_1 = 3\pi/2$  e  $\beta_2 = 3\pi$ .

Os deslocamentos verticais no nó 1 da treliça para excitações com  $\omega = 5000\text{rad/s}$ ,  $\omega = 7500\text{rad/s}$  e  $\omega = 10000\text{rad/s}$  são mostrados na FIGURA 6.22, FIGURA 6.23 e FIGURA 6.24, respectivamente. O número após o nome da formulação indica o número de funções de aproximação utilizadas por elemento finito. Na FIGURA 6.22, os resultados obtidos com o MEFG e o MEFH não podem ser distinguidos por inspeção visual. Na FIGURA 6.23 e na FIGURA 6.24 não são apresentados os deslocamentos obtidos com o MEFG com



10 funções de aproximação por elemento porque estes não podem ser distinguidos dos deslocamentos obtidos com o MEFH com um mesmo número de funções de aproximação.

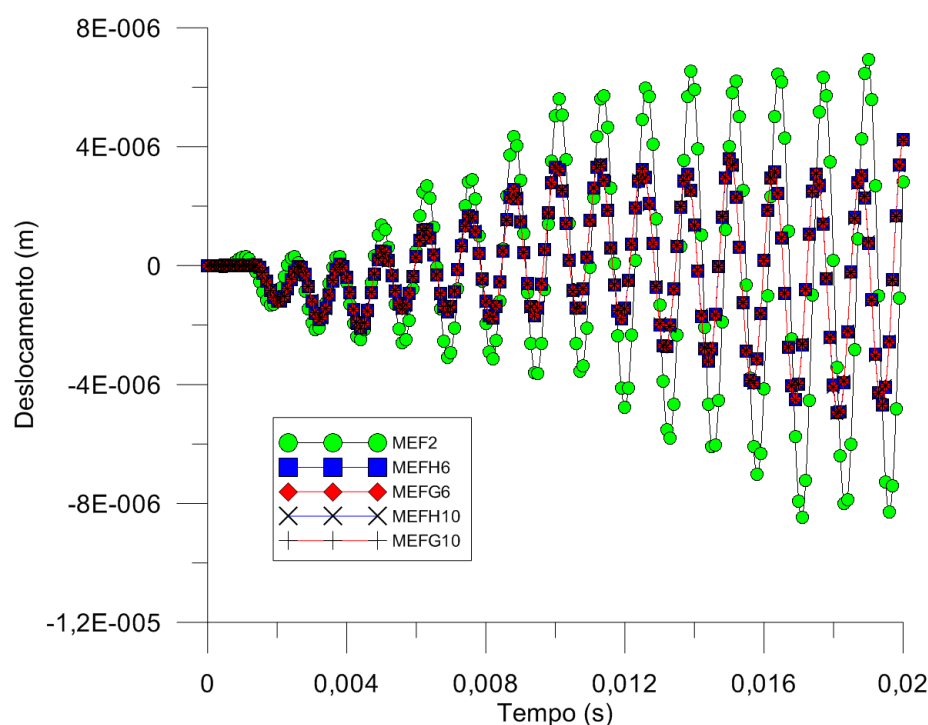
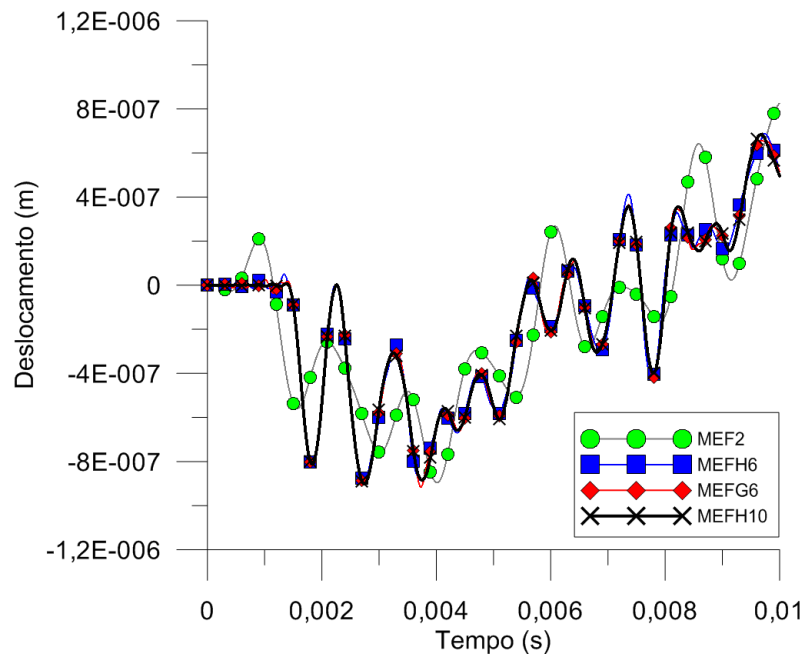


FIGURA 6.22 – EXEMPLO 3: DESLOCAMENTOS VERTICAIS NO NÓ 1 PARA  $\omega = 5000\text{rad/s}$ . O NÚMERO APÓS O NOME DA FORMULAÇÃO INDICA O NÚMERO DE FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO UTILIZADAS POR ELEMENTO. OS RESULTADOS OBTIDOS COM O MEFG E O MEFH NÃO PODEM SER DISTINGUIDOS POR INSPEÇÃO VISUAL.

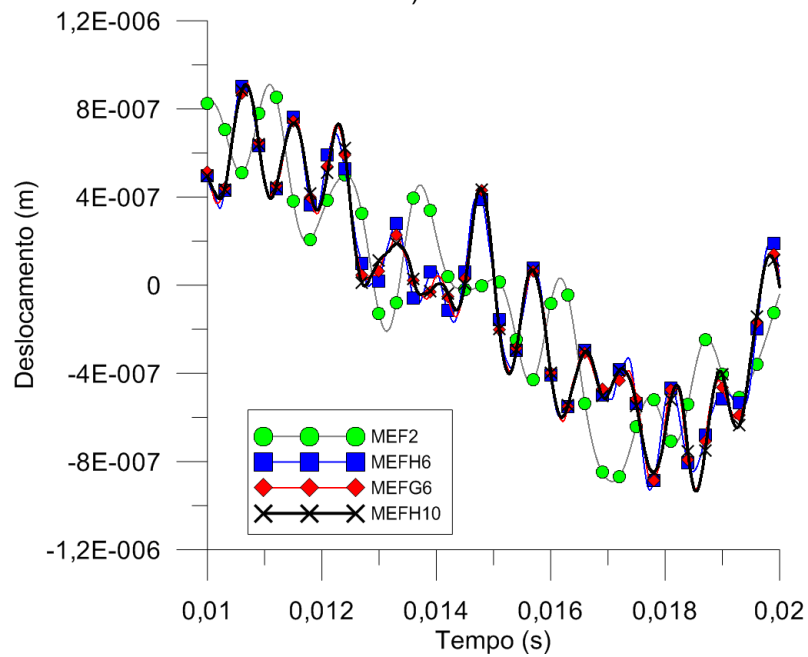
No caso de uma excitação com frequência  $\omega = 5000\text{rad/s}$ , os deslocamentos obtidos com o MEFH e o MEFG foram praticamente idênticos. Já os deslocamentos obtidos com o MEF linear são bastante diferentes daqueles obtidos com os outros dois métodos.

Quando a frequência de excitação é aumentada para  $\omega = 7500\text{rad/s}$ , os deslocamentos obtidos com o MEFG e o MEFH com 6 funções por elemento não são mais idênticos. Porém, nota-se que os deslocamentos obtidos com o MEFG6 estão ligeiramente mais próximos daqueles obtidos com o MEFH10 do que os deslocamentos obtidos com o MEFH6. Isto indica que os resultados obtidos pelo MEFG6 são mais precisos do que aqueles obtidos com o MEFH6. Os resultados obtidos com o MEF linear, por outro lado, são bastante diferentes daqueles obtidos com os outros dois métodos. Por fim, os deslocamentos obtidos com o MEFG e o MEFH com 10 funções de aproximação por elemento continuam sendo praticamente idênticos e, portanto, os resultados obtidos com o MEFG10 não são mostrados.

Para uma frequência de excitação de  $\omega = 10000\text{rad/s}$ , os deslocamentos obtidos com o MEFG6 são bastante semelhantes àqueles obtidos com o MEFH10. Já os

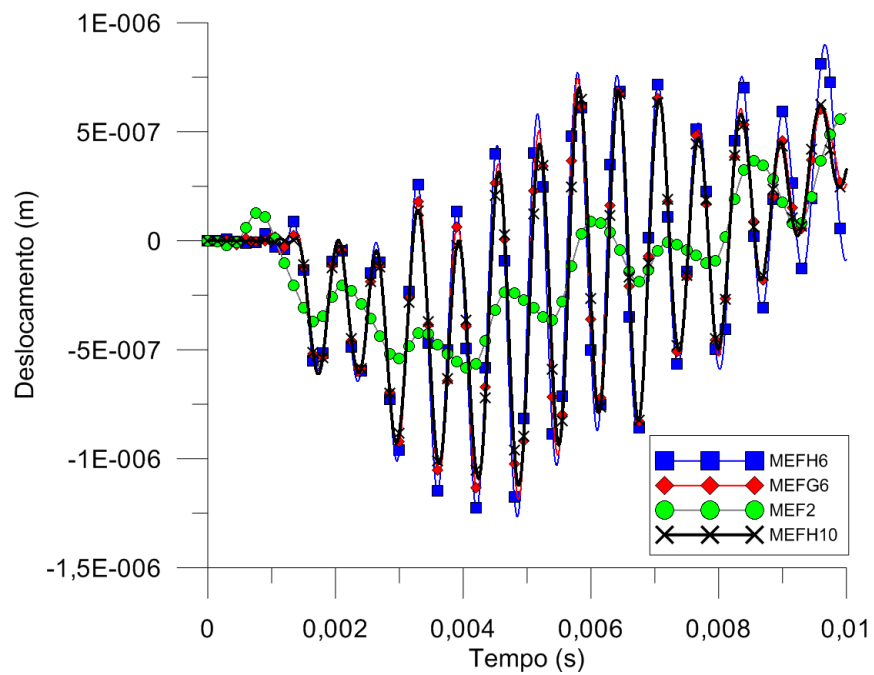


a)

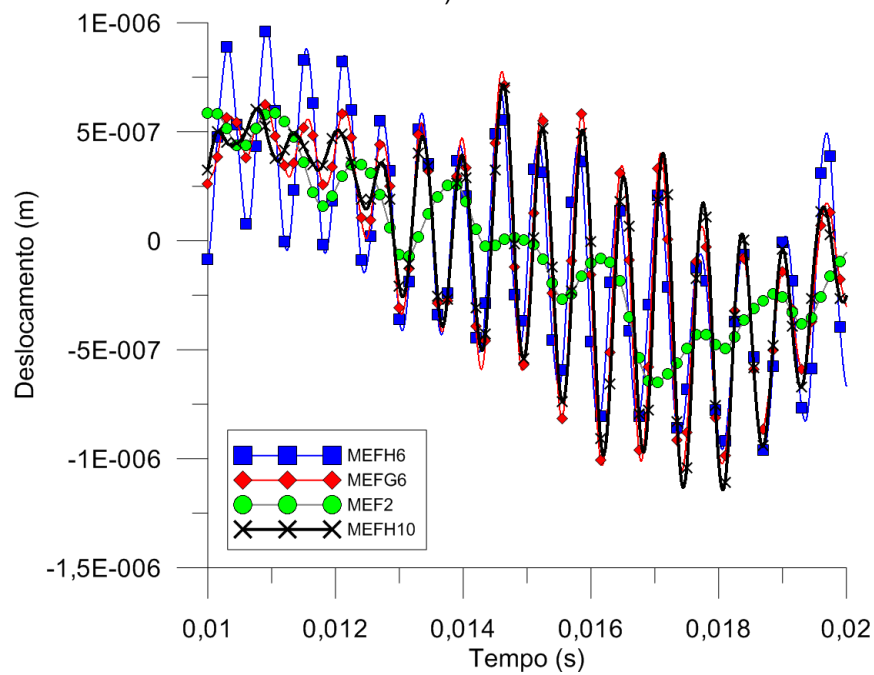


b)

FIGURA 6.23 – EXEMPLO 3: DESLOCAMENTOS VERTICAIS NO NÓ 1 PARA  $\omega = 7500 \text{ rad/s}$ . O NÚMERO APÓS O NOME DA FORMULAÇÃO INDICA O NÚMERO DE FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO UTILIZADAS POR ELEMENTO. OS RESULTADOS OBTIDOS COM O MEF66 NÃO PODEM SER DISTINGUIDOS DAQUELES OBTIDOS COM O MEFH66 POR INSPEÇÃO VISUAL E POR ISSO OS RESULTADOS OBTIDOS COM O MEF66 NÃO SÃO APRESENTADOS.



a)



b)

FIGURA 6.24 – EXEMPLO 3: DESLOCAMENTOS VERTICAIS NO NÓ 1 PARA  $\omega = 10000 \text{ rad/s}$ . O NÚMERO APÓS O NOME DA FORMULAÇÃO INDICA O NÚMERO DE FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO UTILIZADAS POR ELEMENTO. OS RESULTADOS OBTIDOS COM O MEFH10 NÃO PODEM SER DISTINGUIDOS DAQUELES OBTIDOS COM O MEFH10 POR INSPEÇÃO VISUAL E POR ISSO OS RESULTADOS OBTIDOS COM O MEFH10 NÃO SÃO APRESENTADOS.

resultados obtidos com o MEFH6 são bastante distintos. Isto indica que o MEFG6 foi capaz de obter resultados bem mais precisos neste caso. Novamente, os resultados obtidos com o MEFG10 não são mostrados pois são muito semelhantes àqueles obtidos com o MEFH10.

Os deslocamentos verticais obtidos no nó 2 obtidos com uma frequência de excitação de  $\omega = 10000 \text{ rad/s}$  são mostrados na FIGURA 6.25. Neste caso, nota-se que o MEFG6 obteve resultados mais próximos daqueles obtidos com o MEFH10 do que o MEFH6.

Os erros percentuais para as frequências naturais de vibração obtidas com o MEFH e o MEFG são mostrados na TABELA 6.6 e na FIGURA 6.26. A solução de referência foi obtida com o MEFH polinomial utilizando 14 funções de forma por elemento finito, o que corresponde a elementos de ordem igual a 13. Os erros foram calculados para o MEFG e o MEFH com 6 e 10 funções de forma por elemento finito.

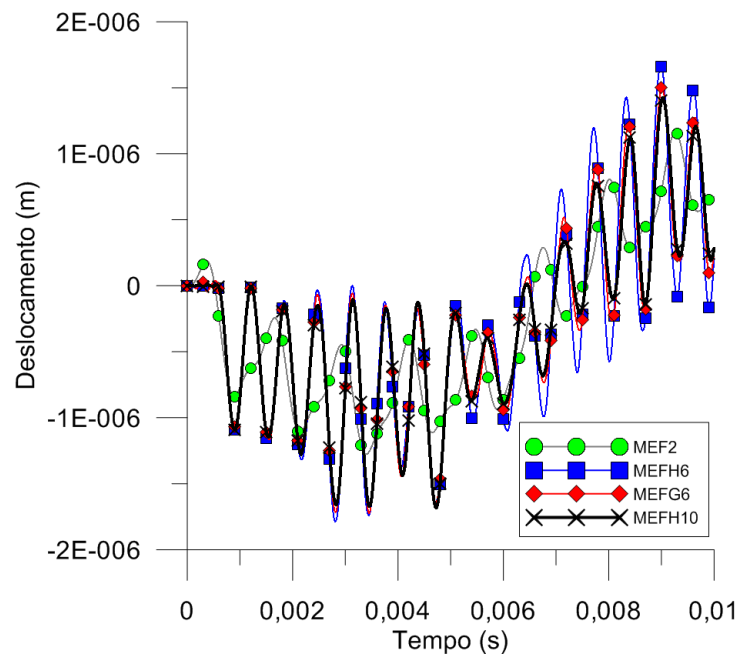
Os erros apresentados na TABELA 6.6 mostram que o MEFH é superior ao MEFG para o cálculo das frequências de vibração mais baixas. Porém, o MEFG é capaz de obter melhores resultados para as frequências mais altas.

Quando foram utilizadas 6 funções de aproximação por elemento finito, o MEFH polinomial foi superior ao MEFG até a nona frequência natural. Deste ponto em diante, o MEFG obteve melhores resultados. No caso de 10 funções de forma, o MEFH foi superior ao MEFG até a décima quarta frequência.

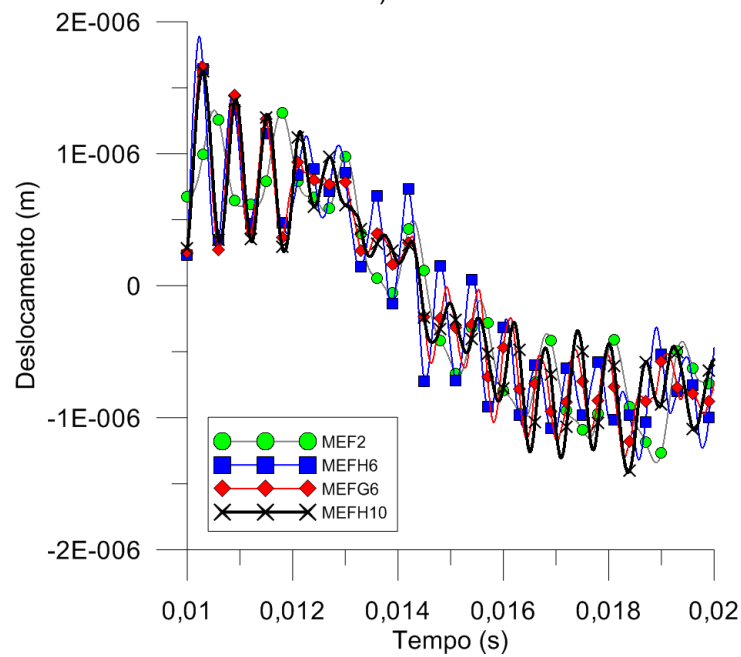
Apesar do MEFH ser capaz de obter melhores resultados para as primeiras frequências de vibração, este fato parece não ter influenciado significativamente as análises para resposta no tempo apresentadas anteriormente. Isto provavelmente ocorre porque os erros obtidos com o MEFG para as primeiras frequências são suficientemente precisos para garantir uma boa aproximação da resposta no tempo. Já os resultados obtidos com o MEFH são comprometidos pela aproximação mais pobre para os modos mais altos.

Da TABELA 6.6 nota-se que o erro obtido com o MEFH polinomial com 10 funções de aproximação para a primeira frequência natural é um valor negativo, o que parece contradizer a equação (6.48). Porém, este resultado provavelmente foi observado devido a erros de arredondamento, uma vez que a primeira frequência foi aproximada de forma muito semelhante por todos os métodos. Além disso, é importante ressaltar que a tolerância utilizada para resolver o problema de autovalores de autovetores generalizado foi igual a  $10^{-10}$ . Assim, é muito provável que o erro negativo tenha ocorrido por causa da solução aproximada dos problemas de autovalores e autovetores da análise modal.

Da FIGURA 6.26 nota-se que o MEFG com 6 funções de forma obteve



a)

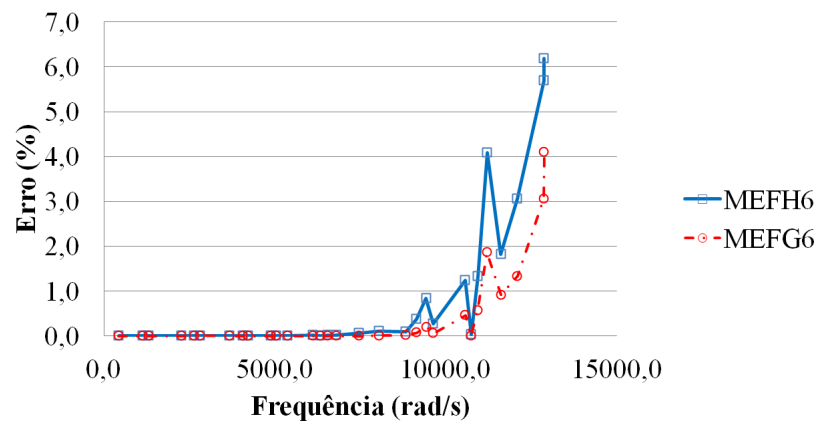


b)

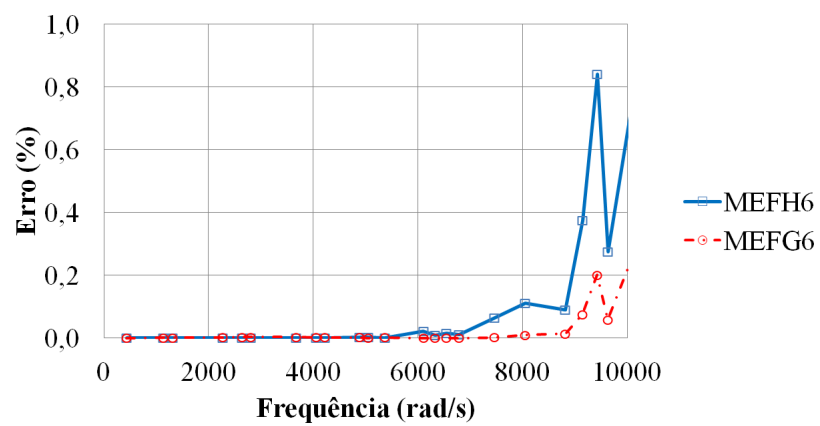
FIGURA 6.25 – EXEMPLO 3: DESLOCAMENTOS VERTICAIS NO NÓ 2 PARA  $\omega = 10000 \text{ rad/s}$ . O NÚMERO APÓS O NOME DA FORMULAÇÃO INDICA O NÚMERO DE FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO UTILIZADAS POR ELEMENTO. OS RESULTADOS OBTIDOS COM O MEFH10 NÃO PODEM SER DISTINGUIDOS DAQUELES OBTIDOS COM O MEF610 POR INSPEÇÃO VISUAL E POR ISSO OS RESULTADOS OBTIDOS COM O MEF610 NÃO SÃO APRESENTADOS.

TABELA 6.6 – EXEMPLO 3: ERROS PERCENTUAIS (%) DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO.

MODO	FREQ. (rad/s)	MEFH6	MEFG6	MEFH10	MEFG10
1	435,8366	0,0000E+00	1,5266E-04	-2,3476E-13	2,0708E-08
2	1134,0829	1,3209E-09	1,0096E-03	0,0000E+00	1,3392E-07
3	1315,5877	3,8082E-09	1,1334E-03	0,0000E+00	1,4943E-07
4	2274,2166	9,3554E-08	1,8421E-03	0,0000E+00	2,3382E-07
5	2645,4662	1,2478E-05	3,3977E-03	0,0000E+00	3,8991E-07
6	2807,3449	1,8134E-05	3,2947E-03	0,0000E+00	3,7702E-07
7	3678,8484	2,5273E-04	2,8627E-03	3,5353E-12	3,0202E-07
8	4060,7973	1,2259E-04	1,6007E-03	3,4491E-12	1,7220E-07
9	4229,0158	1,4385E-03	2,3559E-03	6,1959E-11	2,3431E-07
10	4891,4905	2,4928E-03	2,4820E-03	3,3916E-10	2,4689E-07
11	5047,3524	2,5728E-03	7,1409E-04	4,6540E-10	6,8437E-08
12	5365,2909	7,3569E-04	2,6506E-03	1,3053E-11	2,4839E-07
13	6104,8391	2,1640E-02	1,4121E-04	2,0079E-08	1,0996E-08
14	6322,9857	9,4165E-03	3,2574E-04	1,0278E-08	2,5023E-08
15	6540,5061	1,5228E-02	2,5483E-04	2,1027E-08	1,6446E-08
16	6786,6099	1,2177E-02	2,0777E-04	1,6230E-08	9,5380E-09
17	7459,9632	6,3575E-02	2,7597E-03	2,9688E-07	5,3525E-08
18	8049,5193	1,1050E-01	9,9691E-03	9,7677E-07	1,1455E-07
19	8817,5331	9,0165E-02	1,3734E-02	9,7986E-07	4,0487E-08
20	9141,8938	3,7601E-01	7,5769E-02	1,1875E-05	2,9765E-07
21	9420,3226	8,4134E-01	2,0133E-01	3,6919E-05	5,2792E-07
22	9630,1153	2,7607E-01	5,8899E-02	1,2142E-05	1,2934E-07
23	10570,3693	1,2462E+00	4,5950E-01	1,5880E-04	1,3731E-07
24	10730,5817	2,9297E-02	1,4392E-03	6,0262E-08	9,4412E-09
25	10928,5122	1,3278E+00	5,7563E-01	2,7359E-04	2,0712E-08
26	11204,9839	4,0859E+00	1,8600E+00	9,6751E-04	2,1821E-09
27	11606,1680	1,8154E+00	9,1380E-01	6,2042E-04	2,0835E-07
28	12088,4952	3,0623E+00	1,3305E+00	1,0062E-03	6,0128E-07
29	12859,6413	5,6999E+00	3,0576E+00	5,4510E-03	1,0353E-05
30	12869,0697	6,1897E+00	4,0934E+00	3,9969E-03	7,9614E-06



a)



b)

FIGURA 6.26 – EXEMPLO 3: ERROS PERCENTUAIS DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO PARA a) AS 30 PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS NATURAIS E b) AS FREQUÊNCIAS ATÉ 10000rad/s.

aproximações mais precisas para as frequências naturais entre 6000rad/s e 10000rad/s. Esta faixa de frequências coincide com as frequências de excitação utilizadas para se obter as respostas no tempo deste exemplo, o que parece explicar a superioridade do MEFG neste exemplo.

Os resultados obtidos neste capítulo indicam que a formulação do MEFG proposta neste trabalho é capaz de obter resultados mais precisos em alguns casos da análise dinâmica para resposta no tempo. Isto é verdade principalmente para problemas sujeitos a vibrações onde a participação dos modos mais altos de vibração é significativa, como problemas sujeitos a excitações com frequências elevadas.

A superioridade dos resultados obtidos com o MEFG nestes casos está relacionada com a capacidade do MEFG em obter melhores aproximações para os modos de vibração mais elevados, sem sacrificar severamente a precisão dos modos de vibração com frequências mais baixas.



## 7 ELEMENTOS DE VIGA $C^1$ DE EULER-BERNOULLI

Neste capítulo é apresentado o MEFG para vigas e pórticos. No caso de vigas, são considerados apenas deslocamentos transversais ao eixo da viga. Já no caso de elementos de pórtico, são considerados os deslocamentos transversais e os deslocamentos axiais das vigas. É importante notar que a formulação do MEFG apresentada para o problema de vigas neste trabalho é bastante diferente daquela apresentada por Arndt (2009).

A equação diferencial parcial que rege os deslocamentos transversais em uma viga de Euler-Bernoulli com seção uniforme para o caso dinâmico, como aquela mostrada na FIGURA 7.1, é dada por (CLOUGH; PENZIEN, 1975):

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t), \quad \forall x \in \Omega = [a, b] \quad (7.1)$$

onde  $w$  são os deslocamentos transversais da viga,  $q(x, t)$  é um carregamento transversal distribuído,  $E$  é o módulo de elasticidade do material,  $I$  é o momento de inércia da seção transversal,  $A$  é a área da seção transversal e  $\rho$  é a massa específica do material. Por simplicidade, na equação (7.1) o módulo de elasticidade, o momento de inércia, a área e a massa específica são tomados como constantes ao longo de toda a viga.

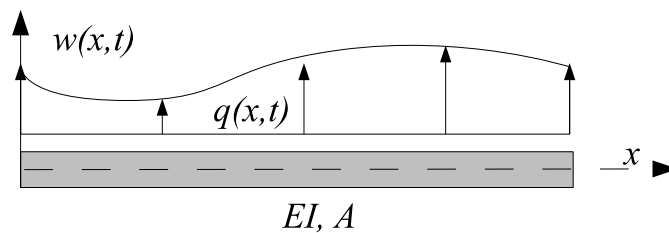


FIGURA 7.1 – VIGA SUJEITA A DESLOCAMENTOS TRANSVERSAIS.

A forma fraca do problema dado pela equação (7.1) pode ser obtida multiplicando por uma função de teste  $v(x)$  e integrando no domínio, o que resulta em:

$$EI \int_{\Omega} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} v d\Omega + \rho A \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} v d\Omega = \int_{\Omega} q(x) v d\Omega. \quad (7.2)$$

O termo à esquerda da equação (7.2) pode ser integrado por partes duas vezes, o que resulta em

$$EI \int_{\Omega} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} v d\Omega = EI \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} v \right]_{\partial\Omega} - EI \int_{\Omega} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega \quad (7.3)$$

e

$$EI \int_{\Omega} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega = EI \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right]_{\partial\Omega} - EI \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} d\Omega. \quad (7.4)$$

A substituição da equação (7.4) e da equação (7.3) na equação (7.2) resulta em

$$EI \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} d\Omega + \rho A \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} v d\Omega = \int_{\Omega} q(x) v d\Omega + EI \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right]_{\partial\Omega} - EI \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} v \right]_{\partial\Omega}, \quad (7.5)$$

onde os dois últimos termos da equação representam as condições de contorno naturais. A equação (7.5) é a forma fraca do problema dado pela equação (7.1).

A substituição de  $u$  e  $w$  escritos como na equação (3.6) resulta no sistema de equações

$$\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}, \quad (7.6)$$

que é igual àquele da equação (6.45).

Porém, no caso de vigas a matriz de rigidez é dada por

$$K_{ij}^e = EI \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x^2} d\Omega^e, \quad (7.7)$$

onde  $\psi_i$  são as funções de forma do elemento.

A matriz de massa consistente para um dado elemento finito continua sendo dada por

$$M_{ij}^e = \rho A \int_{\Omega} \psi_i \psi_j d\Omega^e, \quad (7.8)$$

que é igual à equação (6.47).

O vetor de forças é dado agora por

$$F_i = \int_{\Omega} q(x) \psi_i d\Omega + EI \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right]_{\partial\Omega} - EI \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \psi_i \right]_{\partial\Omega}, \quad (7.9)$$

onde  $\partial^3 w / \partial x^3$  e  $\partial^2 w / \partial x^2$  são condições de contorno naturais conhecidas. As condições de contorno do tipo  $\partial^3 w / \partial x^3$  estão relacionadas com forças concentradas nas extremidades da viga, enquanto as condições de contorno do tipo  $\partial^2 w / \partial x^2$  estão relacionadas com momentos concentrados nas extremidades das vigas. Uma interpretação física destes conceitos é apresentada por Rao (2005) e por Petyt (2010).

Da equação (7.1) nota-se que os deslocamentos transversais em vigas são regidos por uma equação diferencial parcial de quarta ordem. Este fato faz com que a abordagem utilizada para construir as aproximações do MEF para este problema seja diferente daquela utilizada para o problema de barras sujeitas a deslocamentos axiais, cuja equação diferencial associada é de segunda ordem. Assim, as funções de forma utilizadas devem ser diferentes.

Da equação (7.7) é possível notar que a avaliação da matriz de rigidez requer que as funções de forma possuam derivada segunda que seja quadraticamente integrável. Esta característica pode ser garantida quando as funções de forma possuírem derivada primeira contínua, ou seja, quando pertencerem a  $C^1[a, b]$ . Por este motivo a aproximação utilizada para o problema de vigas de Euler-Bernoulli é conhecida como do tipo  $C^1$ .

A formulação tradicional do MEF para problemas de vigas de Euler-Bernoulli utiliza os polinômios cúbicos de Hermite como funções de aproximação (RAO, 2005; PETYT, 2010). Neste caso cada elemento possui quatro graus de liberdade: deslocamentos transversais e rotações nos nós inicial e final. Uma vez que as matrizes de rigidez e de massa e o vetor de forças tenham sido obtidos, estes podem ser combinados com aqueles do caso de barras sujeitas a esforços axiais para se modelar problemas de pórticos (RAO, 2005; PETYT, 2010).

## 7.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS HIERÁRQUICO

O MEFH polinomial para vigas  $C^1$  pode ser obtido ao se utilizar os polinômios de Bardell como funções de forma, que são obtidos da integração dos polinômios de Legendre (BARDELL, 1991; BESLIN; NICOLAS, 1997; HOUMAT, 1997). Os primeiros doze polinômios de Bardell no domínio  $\xi = [-1, 1]$  são

$$l_1 = \frac{1}{4}\xi^3 - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{2}, \quad (7.10)$$

$$l_2 = -\frac{1}{4}\xi^3 + \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{2}, \quad (7.11)$$

$$l_3 = \frac{1}{8}\xi^3 - \frac{1}{8}\xi^2 - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}, \quad (7.12)$$

$$l_4 = \frac{1}{8}\xi^3 + \frac{1}{8}\xi^2 - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}, \quad (7.13)$$

$$l_5 = \frac{1}{8}\xi^4 - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{8}, \quad (7.14)$$

$$l_6 = \frac{1}{8}\xi^5 - \frac{1}{4}\xi^3 + \frac{1}{8}\xi, \quad (7.15)$$

$$l_7 = \frac{7}{48}\xi^6 - \frac{5}{16}\xi^4 + \frac{3}{16}\xi^2 - \frac{1}{48}, \quad (7.16)$$

$$l_8 = \frac{3}{16}\xi^7 - \frac{7}{16}\xi^5 + \frac{5}{16}\xi^3 - \frac{1}{16}\xi, \quad (7.17)$$

$$l_9 = \frac{33}{128}\xi^8 - \frac{21}{32}\xi^6 + \frac{35}{64}\xi^4 - \frac{5}{32}\xi^2 + \frac{1}{128}, \quad (7.18)$$

$$l_{10} = \frac{143}{384}\xi^9 - \frac{33}{32}\xi^7 + \frac{63}{64}\xi^5 - \frac{35}{96}\xi^3 + \frac{5}{128}\xi, \quad (7.19)$$

$$l_{11} = \frac{143}{256}\xi^{10} - \frac{429}{256}\xi^8 + \frac{231}{128}\xi^6 - \frac{105}{128}\xi^4 + \frac{35}{256}\xi^2 - \frac{1}{256} \quad (7.20)$$

e

$$l_{12} = \frac{221}{256}\xi^{11} - \frac{715}{256}\xi^9 + \frac{429}{128}\xi^7 - \frac{231}{128}\xi^5 + \frac{105}{256}\xi^3 - \frac{7}{256}\xi, \quad (7.21)$$

que são mostrados na FIGURA 7.2.

Os quatro primeiros polinômios de Bardell são na verdade os polinômios cúbicos de Hermite. Consequentemente, ao se utilizar apenas estes polinômios o MEFH torna-se o MEF cúbico hermitiano padrão. Porém, para aumentar a ordem da aproximação basta utilizar mais polinômios de Bardell como funções de aproximação. Neste caso, a inclusão de mais polinômios não modifica os polinômios já utilizados, o que permite a utilização de aproximações de ordem elevada. Esta é uma característica geral dos esquemas hierárquicos de aproximação (SOLÍN et al., 2004).

Da FIGURA 7.2 pode-se notar que todos os polinômios para  $i > 4$  são nulos em

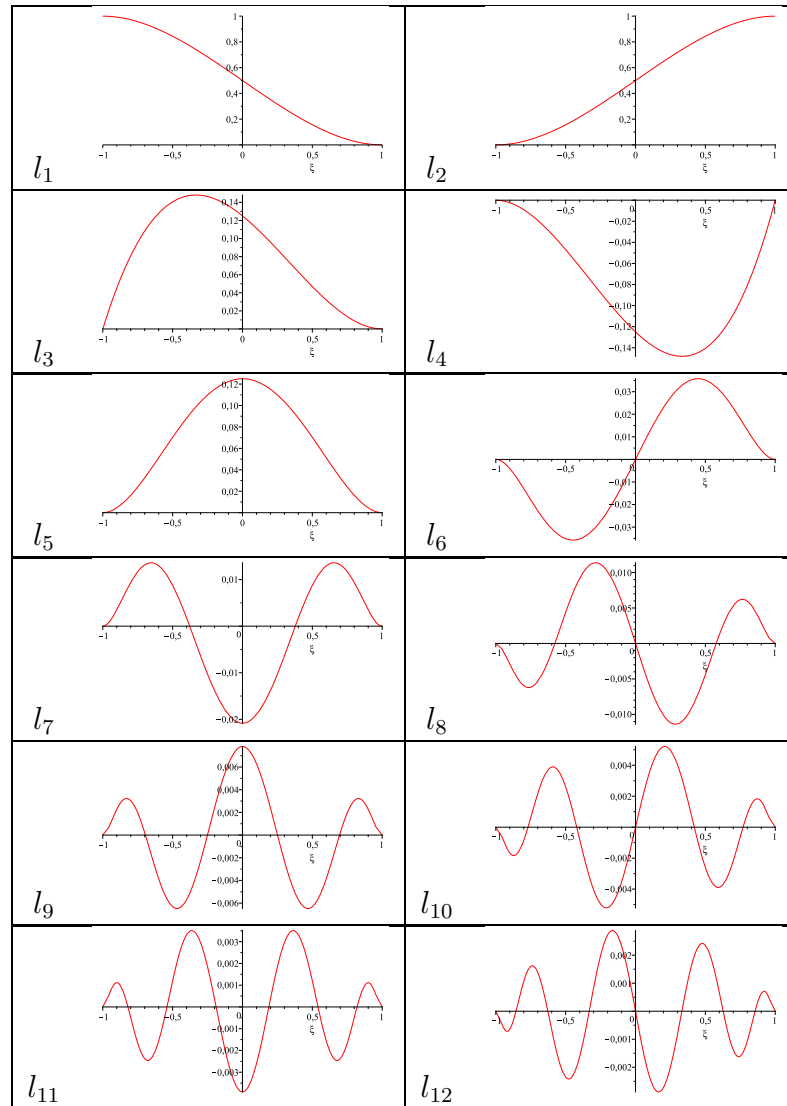


FIGURA 7.2 – OS DOZE PRIMEIROS POLINÔMIOS DE BARDELL.

$\xi = -1$  e  $\xi = 1$ . Estas posições correspondem aos nós do elemento finito e, portanto, os deslocamentos nodais continuam sendo definidos apenas pelos polinômios cúbico de Hermite. Além disso, os polinômios para  $i > 4$  também possuem derivadas nulas em  $\xi = -1$  e  $\xi = 1$ . Isto garante que as rotações nodais sejam também definidas apenas pelos polinômios cúbico de Hermite. Consequentemente, todos os graus de liberdade nodais são definidos apenas pelos polinômios cúbicos hermitianos.

Esta característica simplifica a implementação numérica do método, pois as condições de contorno essenciais podem ser aplicadas com o procedimento padrão do MEF hermitiano. Técnicas como Métodos de Penalização ou o Método dos Multiplicadores de Lagrange (CAREY; ODEN, 1983; BREZZI; FORTIN, 1991) não são necessárias.

As matrizes de rigidez e de massa podem ser obtidas através da equação (7.7) e da equação (6.47) e são mostradas a seguir para um elemento obtido com 6 polinômios de Bardell. É importante ressaltar que as matrizes foram obtidas simbolicamente com o programa Maple (MAPLESOFT, 2009) e contêm diversos termos fracionários. Aqui as matrizes são apresentadas com representação decimal para facilitar a visualização.

$$\mathbf{K}^e = EI \begin{bmatrix} 12.0 L^{-3} & -12.0 L^{-3} & 6.0 L^{-2} & 6.0 L^{-2} & 0.0 & 0.0 \\ -12.0 L^{-3} & 12.0 L^{-3} & -6.0 L^{-2} & -6.0 L^{-2} & 0.0 & 0.0 \\ 6.0 L^{-2} & -6.0 L^{-2} & 4.0 L^{-1} & 2.0 L^{-1} & 0.0 & 0.0 \\ 6.0 L^{-2} & -6.0 L^{-2} & 2.0 L^{-1} & 4.0 L^{-1} & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 3.200000000 L^{-3} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.285714286 L^{-3} \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

e

$$\mathbf{M}^e = \rho A \begin{bmatrix} 0.3714285714 L & 0.1285714286 L & 0.05238095238 L^2 & -0.03095238095 L^2 & 0.03333333333 L & -0.006349206349 L \\ 0.1285714286 L & 0.3714285714 L & 0.03095238095 L^2 & -0.05238095238 L^2 & 0.03333333333 L & 0.006349206349 L \\ 0.05238095238 L^2 & 0.03095238095 L^2 & 0.009523809524 L^3 & -0.007142857143 L^3 & 0.007142857143 L^2 & -0.0007936507936 L^2 \\ -0.03095238095 L^2 & -0.05238095238 L^2 & -0.007142857143 L^3 & 0.009523809524 L^3 & -0.007142857143 L^2 & -0.0007936507936 L^2 \\ 0.03333333333 L & 0.03333333333 L & 0.007142857143 L^2 & -0.007142857143 L^2 & 0.006349206349 L & 0.0 \\ -0.006349206349 L & 0.006349206349 L & -0.0007936507936 L^2 & -0.0007936507936 L^2 & 0.0 & 0.0005772005772 L \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

As matrizes de rigidez e de massa da equação (7.22) e da equação (7.23) foram obtidas considerando que: o primeiro grau de liberdade é o deslocamento transversal do primeiro nó do elemento, o segundo grau de liberdade é o deslocamento transversal do segundo nó do elemento, o terceiro grau de liberdade é a rotação do primeiro nó do elemento e o quarto grau de liberdade é a rotação do segundo nó do elemento. Porém, os graus de liberdade introduzidos com as funções de forma para  $i > 4$  não possuem significado físico e são denominados apenas de graus de liberdade de campo. Os polinômios de Bardell para  $i > 4$  são também chamados de funções de enriquecimento.

Como os polinômios de Bardell formam um conjunto de funções ortogonais, de acordo com a forma bilinear dada pelo primeiro termo da equação (7.5), a inclusão de mais graus de liberdade resulta na inclusão de termos apenas na diagonal da matriz de rigidez. Porém, esta característica não é mantida para o caso da matriz de massa consistente, pois os polinômios não são ortogonais em relação à forma bilinear utilizada para obter a matriz de massa.

## 7.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADO

O espaço de aproximação do MEFG utilizado aqui é dado por

$$V_{MEFG} = V_{MEF} \cup V_{MPU}, \quad (7.24)$$

onde  $V_{MEF}$  é o espaço dado pelos polinômios cúbicos de Hermite e  $V_{MPU}$  é um espaço obtido com o MPU. Neste contexto, os polinômios cúbicos de Hermite são utilizadas para o espaço  $V_{MEF}$ .

A PU utilizada neste capítulo é dada pelos dois primeiros polinômios de Hermite, que respeitam as condições necessárias apresentadas anteriormente. Esta PU é apresentada na FIGURA 7.3 para o caso de uma malha composta de três elementos finitos. Neste caso, cada elemento é definido na interseção entre dois subdomínios  $\Omega_i$ . Cada subdomínio  $\Omega_i$  é chamado de subcobertura e a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_n, \quad (7.25)$$

onde  $n$  é o número de subcoberturas que cobrem o domínio do problema  $\Omega$ .

Dentro de uma subcobertura  $\Omega_i$  com coordenadas locais  $\chi = [-1, 1]$  a PU pode ser escrita como



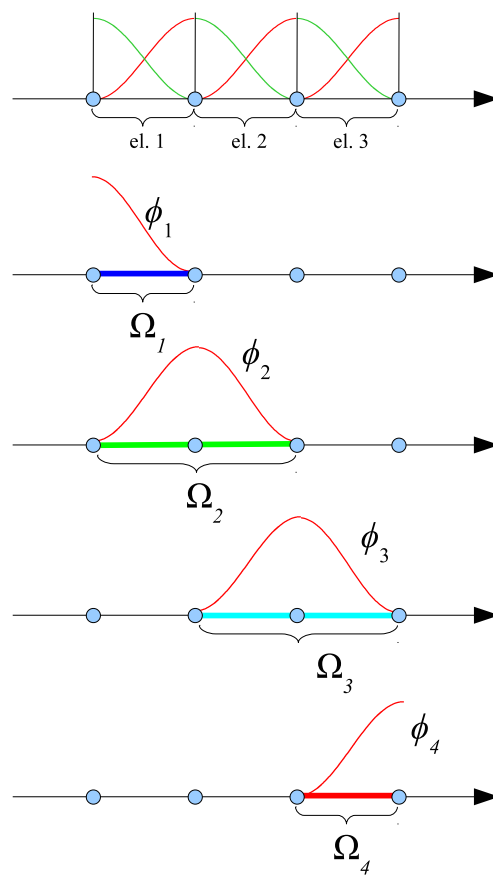


FIGURA 7.3 – PU DEFINIDA POR POLINÔMIOS DE HERMITE.

$$\varphi_i(\chi) = \begin{cases} 1 - 3\chi^2 - 2\chi^3, & \text{se } \chi < 0, \\ 1 - 3\chi^2 + 2\chi^3, & \text{se } \chi \geq 0. \end{cases}, \quad (7.26)$$

que são os dois primeiros polinômios de Hermite e de Bardell, dados pelas equações (7.10) e (7.11), escritos no sistema de coordenadas da subcobertura de forma a resultar na PU mostrada na FIGURA 7.3.

As funções de base dentro de uma dada subcobertura  $\Omega_i$  com coordenadas locais  $\chi = [-1, 1]$  foram escolhidas como

$$v_{ij} = \cos(\beta_j \chi) - 1, \quad (7.27)$$

onde  $\beta_j$  é um parâmetro que pode ser ajustado para modificar as funções de base, o subíndice  $i$  representa a subcobertura  $\Omega_i$  onde a função é definida e o subíndice  $j$  representa o valor de  $\beta_j$  utilizado. A PU da equação (7.26), as funções de base da equação (7.27) e o produto entre estas funções para  $\beta_j = 3\pi/2$  são mostrados na FIGURA 7.4. A escolha destas funções de base será discutida mais adiante.

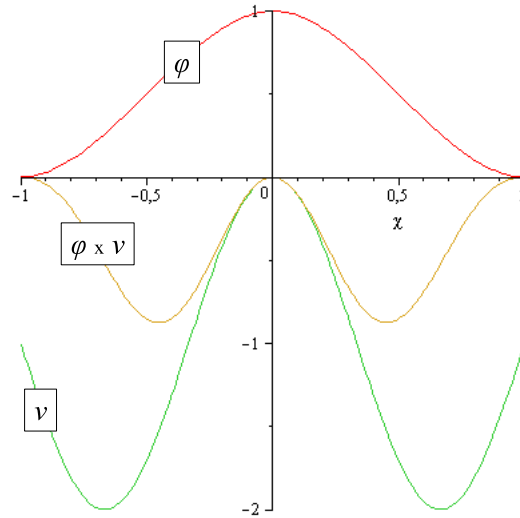


FIGURA 7.4 – PU, FUNÇÕES DE BASE E O PRODUTO ENTRE AS DUAS PARA  $\beta_j = 3\pi/2$  DENTRO DE UMA SUBCOBERTURA.

Como cada elemento finito é definido na interseção entre duas subcoberturas, as funções de aproximação resultantes para o MPU serão aquelas oriundas das subcoberturas à direita e à esquerda do elemento. Para um dado elemento com coordenadas locais  $\xi = [-1, 1]$  a situação é como mostrada na FIGURA 7.5.

As funções de aproximação são obtidas da multiplicação da PU dada pela função de base para a subcobertura da esquerda e pela multiplicação da PU pela função de base para a subcobertura da direita. As funções resultantes do MPU são

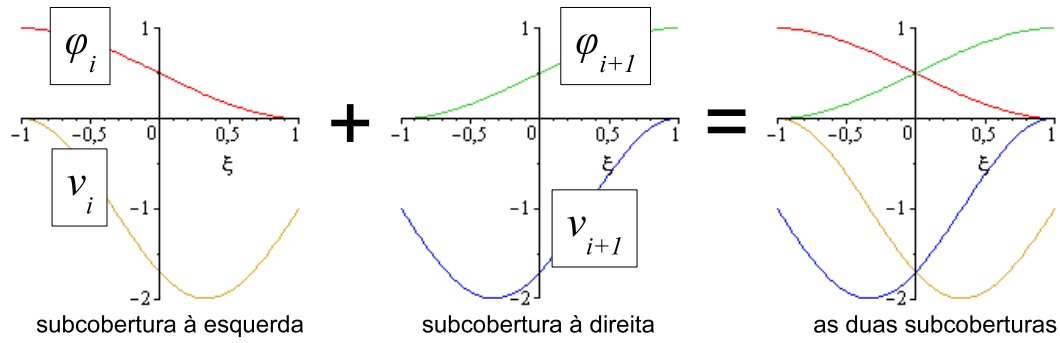


FIGURA 7.5 – PU E FUNÇÕES DE BASE PARA UM DADO ELEMENTO FINITO, CONSIDERANDO A CONTRIBUIÇÃO DAS SUBCOBERTURAS À ESQUERDA E À DIREITA DO ELEMENTO.

$$\psi_{1j} = l_1 \left( \cos \left( \beta_j \frac{\xi + 1}{2} \right) - 1 \right) \quad (7.28)$$

e

$$\psi_{2j} = l_2 \left( \cos \left( \beta_j \frac{\xi - 1}{2} \right) - 1 \right), \quad (7.29)$$

onde  $l_1$  e  $l_2$  são os dois primeiros polinômios de Hermite das equações (7.10) e (7.11) e as funções de base foram transformadas para o sistema de coordenadas locais do elemento finito.

Algumas funções do MPU obtidas com diferentes valores de  $\beta$  são mostradas na FIGURA 7.6.

As funções de aproximação do MPU serão nulas e terão derivadas nulas nos nós dos elementos para qualquer valor de  $\beta$ . Consequentemente, não são necessárias técnicas especiais para a imposição das condições de contorno para o MEFG apresentado aqui.

Quando funções do MPU não são incluídas na aproximação, o MEFG como proposto aqui torna-se o MEF hermitiano padrão. Porém, o espaço de aproximação pode ser enriquecido incluindo-se um ou mais pares de funções do MPU, assumindo-se diferentes valores para  $\beta_j$ . O MEFG resultante é um método hierárquico uma vez que a ordem da aproximação pode ser aumentada sem modificar as funções de aproximação já utilizadas. Porém, os graus de liberdade associados ao MPU não possuem significado físico e são designados apenas por graus de liberdade de campo.

Uma vez que as funções de forma do MEFG dentro dos elementos tenham sido obtidas, elas são desvinculadas dos elementos vizinhos. Ou seja, os graus de liberdade de campo de um dado elemento não possuem relação direta com os graus de liberdade

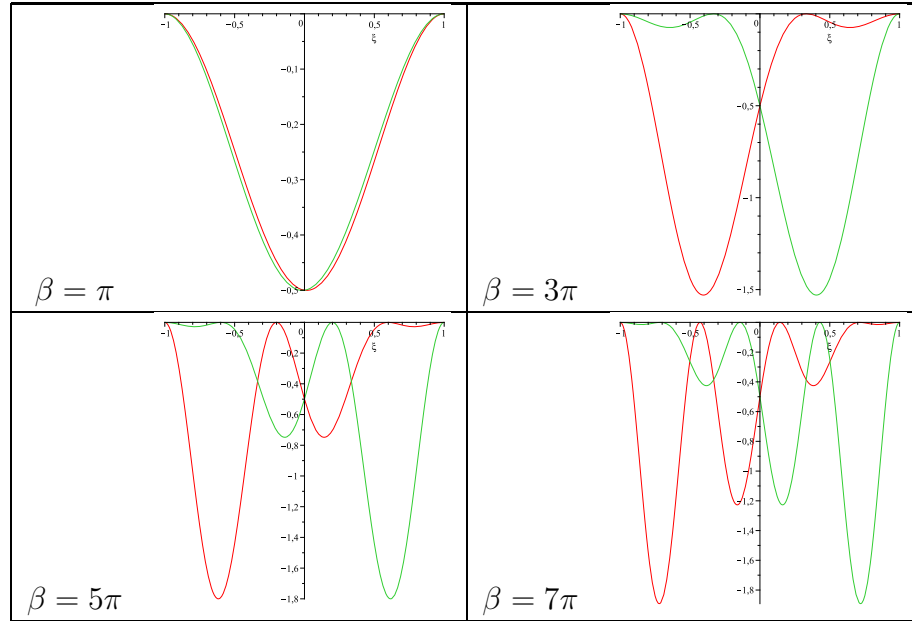


FIGURA 7.6 – FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO DO MPU OBTIDAS COM DIFERENTES VALORES DE  $\beta$ .

de campo dos elementos vizinhos.

As características discutidas na Seção 6.5.2 continuam sendo válidas. Assim, espera-se que apenas o refino do tipo  $p$  seja capaz de gerar resultados monotonicamente convergentes para as frequências de vibração. Mesmo assim, os resultados indicam que o MEFG pode obter resultados mais precisos que o MEFH polinomial em diversos casos, principalmente quando a participação das frequências de vibração mais elevadas é dominante.

As matrizes de rigidez e de massa podem ser obtidas com o procedimento padrão do MEF para vigas e são apresentadas nas equações (7.30) e (7.31) para  $\beta_1 = \pi$ . Novamente, as matrizes são apresentadas com representação decimal para facilitar a visualização, mas foram obtidas simbolicamente com termos fracionários.

$$\mathbf{K}^e = EI \begin{bmatrix} 12.0 L^{-3} & -12.0 L^{-3} & 6.0 L^{-2} & 6.0 L^{-2} & 0.0 & 0.0 \\ -12.0 L^{-3} & 12.0 L^{-3} & -6.0 L^{-2} & -6.0 L^{-2} & 0.0 & 0.0 \\ 6.0 L^{-2} & -6.0 L^{-2} & 4.0 L^{-1} & 2.0 L^{-1} & 0.0 & 0.0 \\ 6.0 L^{-2} & -6.0 L^{-2} & 2.0 L^{-1} & 4.0 L^{-1} & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 4.763285199 L^{-3} & 3.809989942 L^{-3} \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 3.809989942 L^{-3} & 4.763285199 L^{-3} \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

e

$$\mathbf{M}^e = \rho A \begin{bmatrix} 0.3714285714 L & 0.1285714286 L & 0.05238095238 L^2 & -0.03095238095 L^2 & -0.03560193580 L & -0.04140311236 L \\ 0.1285714286 L & 0.3714285714 L & 0.03095238095 L^2 & -0.05238095238 L^2 & -0.04140311236 L & -0.03560193580 L \\ 0.05238095238 L^2 & 0.03095238095 L^2 & 0.009523809524 L^3 & -0.007142857143 L^3 & -0.007913170481 L^2 & -0.008639949488 L^2 \\ -0.03095238095 L^2 & -0.05238095238 L^2 & -0.007142857143 L^3 & 0.009523809524 L^3 & 0.008639949488 L^2 & 0.007913170481 L^2 \\ -0.03560193580 L & -0.04140311236 L & -0.007913170481 L^2 & 0.008639949488 L^2 & 0.008681304665 L & 0.008438485663 L \\ -0.04140311236 L & -0.03560193580 L & -0.008639949488 L^2 & 0.007913170481 L^2 & 0.008438485663 L & 0.008681304665 L \end{bmatrix}. \quad (7.31)$$

### 7.2.1 Escolha das funções de base

Para justificar a escolha das funções de base propostas é interessante apresentar as condições necessárias para que as funções de aproximação se anulem nos nós do elemento. Neste caso basta analisar a contribuição da subcobertura à esquerda do elemento, mostrada na FIGURA 7.5.

A partição da unidade da subcobertura à esquerda do elemento respeita as seguintes condições:

$$\begin{cases} \varphi_i(0) = 1 \\ \varphi_i(1) = 0 \\ \frac{\partial \varphi_i(0)}{\partial \chi} = 0 \\ \frac{\partial \varphi_i(1)}{\partial \chi} = 0 \end{cases}, \quad (7.32)$$

onde  $\chi$  é a coordenada local dentro da subcobertura.

A função de forma resultante do MPU para uma função de base  $v$  será

$$\psi = \varphi v. \quad (7.33)$$

Esta função de forma deve se anular nos nós do elemento para não interferir na imposição das condições de contorno. Como a PU da equação (7.32) se anula em  $\chi = 1$ , então basta que  $v$  se anule em  $\chi = 0$  para que esta condição seja satisfeita. O primeiro requisito que a função de base  $v$  deve respeitar é, portanto,

$$v(0) = 0. \quad (7.34)$$

A função de forma da equação (7.33) também deve possuir derivadas nulas nos nós do elemento, de forma a não interferir nos graus de liberdade relativos às rotações nodais. Assim, as seguintes condições precisam ser satisfeitas:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi(0)}{\partial \chi} = \frac{\partial \varphi(0)}{\partial \chi} v(0) + \frac{\partial v(0)}{\partial \chi} \varphi(0) = 0 \\ \frac{\partial \psi(1)}{\partial \chi} = \frac{\partial \varphi(1)}{\partial \chi} v(1) + \frac{\partial v(1)}{\partial \chi} \varphi(1) = 0 \end{cases}. \quad (7.35)$$

Das condições dadas pela equação (7.32) verifica-se que a segunda condição da equação (7.35) é automaticamente satisfeita. Além disso, das condições dadas pela equação (7.32) e pela equação (7.34) verifica-se a necessidade de que

$$\frac{\partial v(0)}{\partial \chi} = 0. \quad (7.36)$$

Portanto, quando uma PU com as características dadas pela equação (7.32) é utilizada (como é o caso da PU dada pelos polinômios de Hermite), então a função de forma será nula e possuirá derivadas nulas nos nós quando a função de base respeitar as seguintes condições:

$$\begin{cases} v(\chi = 0) = 0 \\ \frac{\partial v(\chi=0)}{\partial \chi} = 0 \end{cases}, \quad (7.37)$$

ou seja, a função de base deverá se anular e possuir derivada nula no centro da subcobertura, posição que corresponde ao nó esquerdo do elemento à direita da subcobertura.

As funções de base da equação (7.27) sempre satisfazem a segunda condição da equação (7.37), pois sempre possuirão derivada nula em  $\chi = 0$ . Porém, as funções da equação (7.27) satisfazem a primeira condição da equação (7.37) apenas por causa do termo  $-1$ . Anteriormente foi demonstrado que somar constantes às funções de base não deve ocasionar problemas do ponto de vista teórico.

Caso fossem utilizadas funções da forma  $\sin(\beta\chi)$ , então a segunda condição da equação (7.37) não seria respeitada, pois esta função não possui derivada nula em  $\chi = 0$ . Assim, as funções do tipo seno não foram incluídas na aproximação.

É importante notar que a solução analítica para os problemas de vigas sujeitas a deslocamentos transversais pode conter também termos hiperbólicos, e não apenas termos trigonométricos. Arndt (2009) e Arndt et al. (2011) apresentaram uma abordagem para incluir também estas funções na aproximação.

Neste trabalho, os termos hiperbólicos não foram incluídos na aproximação porque Arndt (2009) observou que o MEFG contendo apenas enriquecimento trigonométrico obteve melhores resultados para as frequências mais elevadas. A inclusão de termos hiperbólicos parece ser vantajosa apenas para a aproximação das frequências de vibração mais baixas, que costumam ser obtidas com precisão suficiente pelos métodos.

### 7.3 PÓRTICOS

Nas seções anteriores foram apresentadas as formulações do MEFG e do MEFH polinomial para elementos finitos de vigas de Euler-Bernoulli. Estes elementos finitos possuem graus de liberdade relacionados apenas a deslocamentos transversais e rotações. Porém, para modelar alguns tipos de estruturas é necessário também incluir deslocamentos axiais. Este tipo de deslocamento pode ser modelado utilizando-se o

MEFG e o MEFH como descrito para o problema de barras e treliças.

Para obter as equações de um elemento de pórtico como aquele da FIGURA 7.7, que pode estar orientado em uma direção arbitrária no plano, é necessário definir uma regra de transformação de coordenadas. Para um elemento de viga hermitiano padrão, a seguinte transformação de coordenadas é válida (RAO, 2005):

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ w'_1 \\ w'_2 \\ \theta'_1 \\ \theta'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ w_1 \\ w_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \quad (7.38)$$

onde  $u'$  são deslocamentos axiais no sistema de coordenadas local do elemento,  $w'$  são deslocamentos transversais no sistema de coordenadas local do elemento,  $\theta'$  são rotações no sistema de coordenadas local do elemento,  $u$  são deslocamentos horizontais no sistema de coordenadas global,  $w$  são deslocamentos verticais no sistema de coordenadas global,  $\theta$  são rotações no sistema de coordenadas global,  $\alpha$  é o ângulo de inclinação da viga com o eixo horizontal e os índices 1 e 2 referem-se aos nós inicial e final do elemento.

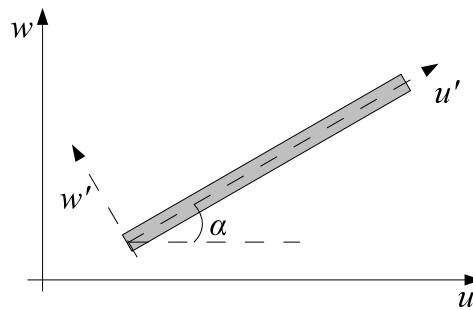


FIGURA 7.7 – VIGA INCLINADA.

Para o MEFG e o MEFH polinomial, uma regra de transformação de coordenadas pode ser obtida utilizando-se o procedimento apresentado por Zeng (1998a) e Zeng (1998b) para o MC. Como os graus de liberdade nodais são definidos apenas pelos polinômios cúbicos de Hermite, a transformação de coordenadas para o MEFG e o MEFH é dada por



$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ w'_1 \\ w'_2 \\ \theta'_1 \\ \theta'_2 \\ c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ w_1 \\ w_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad (7.39)$$

onde  $c'$  são graus de liberdade de campo no sistema de coordenadas local do elemento e  $c$  são graus de liberdade de campo no sistema global de coordenadas. Ou seja, os graus de liberdade de campo são iguais seja no sistema local ou no sistema global, uma vez que eles agem apenas no interior do elemento.

#### 7.4 ASPECTOS DE IMPLEMENTAÇÃO

As rotinas computacionais utilizadas para as análises foram implementadas no programa MATLAB (MATHWORKS, 2011), assim como para o problema de barras sujeitas a deslocamentos axiais. As matrizes de rigidez, de massa e o vetor de forças foram obtidos realizando integração analítica mediante o programa de manipulação simbólica Maple (MAPLESOFT, 2009).

A implementação dos elementos de pórticos, que possuem deslocamentos transversais e axiais, é mais complexa do que a implementação de elementos de vigas ou de elementos de barras separadamente. Isto porque o elemento de pórtico contém aproximações para deslocamentos axiais e transversais simultaneamente. Portanto, deve-se levar em consideração que a aproximação utilizada para os deslocamentos axiais é independente daquela utilizada para os deslocamentos transversais. Assim, é possível utilizar ordens de aproximações diferentes para deslocamentos axiais e transversais.

A obtenção das matrizes de rigidez e de massa para elementos de pórtico foi realizada da seguinte maneira. Primeiro, as matrizes sem enriquecimento para o caso onde existam apenas deslocamentos axiais ou deslocamentos transversais são obtidas separadamente. As matrizes são então concatenadas, ordenando os graus de liberdade na seguinte ordem: deslocamentos axiais, deslocamentos transversais e rotações. As matrizes resultantes serão iguais àsquelas utilizadas tradicionalmente para elementos de

pórtico (RAO, 2005). Os graus de liberdade de campo são adicionados posteriormente na seguinte ordem: deslocamentos axiais e deslocamentos transversais. A matriz no sistema de coordenadas globais é então obtida da equação (7.39).

Novamente, as rotinas relativas ao MEFH polinomial e ao MEFG são praticamente idênticas. A única diferença diz respeito à parcela das matrizes relacionadas com o enriquecimento, que contém termos diferentes.

O número de graus de liberdade contabilizado é aquele antes da imposição das condições de contorno.

## 7.5 RESULTADOS

### 7.5.1 Exemplo 4: Viga engastada sujeita a força harmônica

O primeiro exemplo estudado neste capítulo é aquele da viga engastada sujeita a uma força harmônica, mostrada na FIGURA 7.8. A viga possui comprimento  $L = 5\text{m}$ , área da seção transversal  $A = 0,005\text{m}^2$ , momento de inércia  $I = 4,1667 \times 10^{-6}\text{m}^4$ , módulo de elasticidade  $E = 210\text{GPa}$  e massa específica  $\rho = 8000\text{kg/m}^3$ . Neste exemplo não são incluídos graus de liberdade relacionados a deslocamentos axiais.

A força aplicada é dada por

$$F(t) = f \sin(\omega t), \quad (7.40)$$

onde  $f$  é a magnitude da força e  $\omega$  é a frequência de excitação. Este exemplo foi estudado para uma excitação com frequência de  $\omega = 5000\text{rad/s}$  e magnitude  $f = 1\text{kN}$ . A análise foi feita para um intervalo de tempo de  $0,1\text{s}$  e um passo de tempo igual a  $\Delta t = 2,5 \times 10^{-5}\text{s}$ . O Método de Newmark foi utilizado para a análise dinâmica.

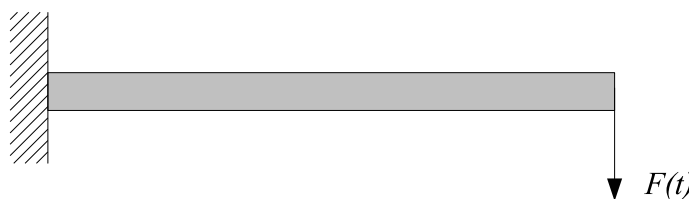


FIGURA 7.8 – EXEMPLO 4: VIGA ENGASTADA SUJEITA A FORÇA HARMÔNICA.

As malhas utilizadas com o MEFH polinomial foram compostas por: a) 4 elementos com 6 funções de aproximação; b) 4 elementos com 8 funções de aproximação e c) 4 elementos com 10 funções de aproximação. Estas malhas resultam em 18, 26 e 34 graus de liberdade respectivamente.

As malhas utilizadas com o MEFG foram compostas por: a) 4 elementos com 2 funções de enriquecimento ( $\beta = \pi$ ); b) 4 elementos com 4 funções de enriquecimento ( $\beta_1 = \pi$  e  $\beta_2 = 3\pi$ ) e c) 4 elementos com 6 funções de enriquecimento ( $\beta_1 = \pi$ ,  $\beta_2 = 3\pi$  e  $\beta_3 = 5\pi$ ). Estas malhas também resultam em 18, 26 e 34 graus de liberdade.

As malhas utilizadas com o MEF hermitiano foram compostas por: a) 10 elementos, b) 14 elementos e c) 18 elementos, o que resulta em 20, 28 e 36 graus de liberdade.

A solução analítica deste problema não é conhecida pelo autor. Consequentemente, a comparação é feita com uma solução de referência obtida com o MEFH polinomial com 8 elementos contendo 14 funções de forma. Isto corresponde a 8 elementos finitos polinomiais de ordem 13 e resulta em 98 graus de liberdade.

Os deslocamentos verticais no meio da viga ( $x = 2,5\text{m}$ ) no intervalo de tempo 0,09-0,10s são apresentados na FIGURA 7.9, FIGURA 7.10 e FIGURA 7.11, para os diferentes números de graus de liberdade utilizados. O número após o nome da formulação indica o número de graus de liberdade utilizados. Os resultados são apresentados apenas para este intervalo de tempo porque nos intervalos de tempo iniciais as diferenças entre os métodos são menos pronunciadas.

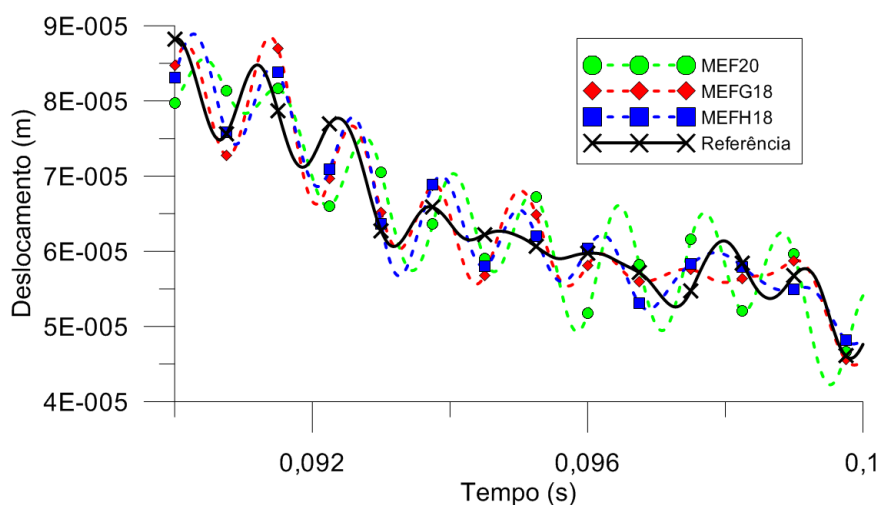


FIGURA 7.9 – EXEMPLO 4: DESLOCAMENTOS VERTICAIS NO MEIO DA VIGA PARA UM INTERVALO DE TEMPO ENTRE 0,09 – 0,10s OBTIDOS COM AS MALHAS DO TIPO a). O NÚMERO APÓS O NOME DA FORMULAÇÃO INDICA O NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE UTILIZADOS.

Quando foram utilizados 18 graus de liberdade (20 no caso do MEF hermitiano), não é possível distinguir qual solução é mais precisa, pois todas as soluções aproximadas parecem ser bastante diferentes da solução de referência. Porém, quando o número de graus de liberdade é aumentado para 26 (28 no caso do MEF hermitiano), os resultados obtidos com o MEFG são mais precisos do que aqueles obtidos com os outros dois métodos, seguido pelos resultados obtidos com o MEFH. Finalmente, quando 34 graus de

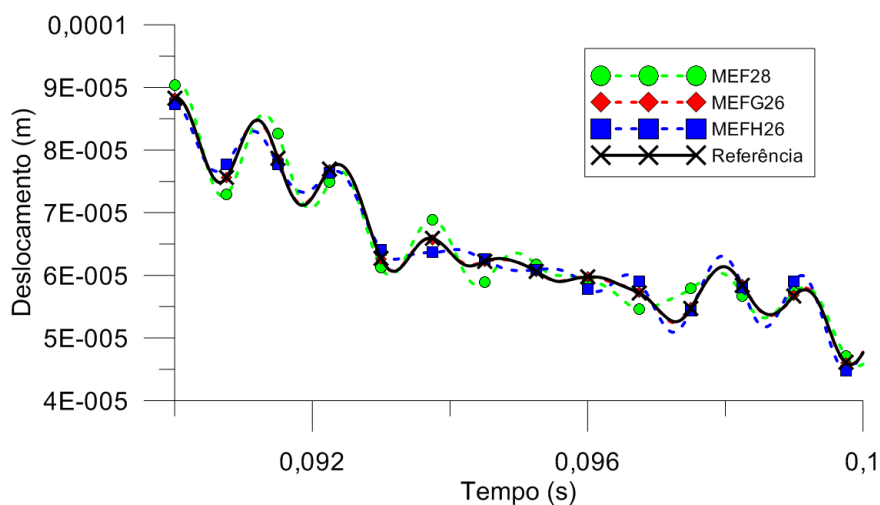


FIGURA 7.10 – EXEMPLO 4: DESLOCAMENTOS VERTICAIS NO MEIO DA VIGA PARA UM INTERVALO DE TEMPO ENTRE 0,09 – 0,10s OBTIDOS COM AS MALHAS DO TIPO b). O NÚMERO APÓS O NOME DA FORMULAÇÃO INDICA O NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE UTILIZADOS.

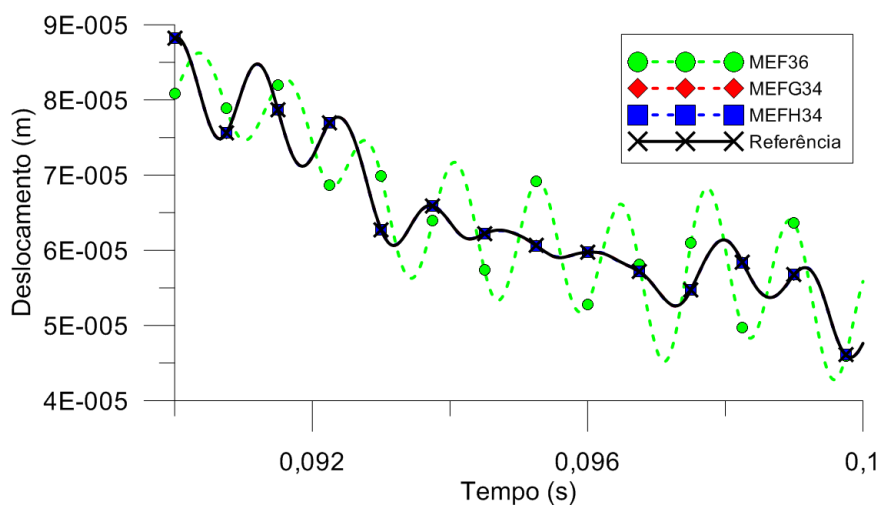


FIGURA 7.11 – EXEMPLO 4: DESLOCAMENTOS VERTICAIS NO MEIO DA VIGA PARA UM INTERVALO DE TEMPO ENTRE 0,09 – 0,10s OBTIDOS COM AS MALHAS DO TIPO c). O NÚMERO APÓS O NOME DA FORMULAÇÃO INDICA O NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE UTILIZADOS.

liberdade foram utilizados (36 no caso do MEF hermitiano), os resultados obtidos com o MEFH e com o MEFG são bastante próximos à solução de referência, enquanto o MEF hermitiano ainda não obtém precisão satisfatória.

Os erros para a resposta no tempo não foram calculados porque neste exemplo é possível observar a maior precisão do MEFG por inspeção visual.

Isto indica que tanto o MEFG quanto o MEFH são capazes de obter soluções mais precisas do que o MEF hermitiano. Porém, o MEFG é capaz de obter soluções mais precisas com um menor número de graus de liberdade. Este resultado pode ser explicado ao se analisar as frequências naturais de vibração da estrutura.

As frequências naturais de vibração de uma viga engastada são apresentadas por Clough e Penzien (1975). As frequência de vibração podem ser obtidas encontrando-se as raízes  $a$  da seguinte equação

$$1 + \cos(a_n L) \cosh(a_n L) = 0, \quad (7.41)$$

onde  $L$  é o comprimento a viga.

As frequências de vibração são então dadas por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{EI a_n^4}{\rho A L^4}}. \quad (7.42)$$

Neste trabalho, as raízes da equação (7.41) foram calculadas com o Método de Newton (QUARTERONI et al., 2007), utilizando uma tolerância de  $10^{-12}$ . Como aproximação inicial foram utilizados os valores obtidos com os métodos aproximados.

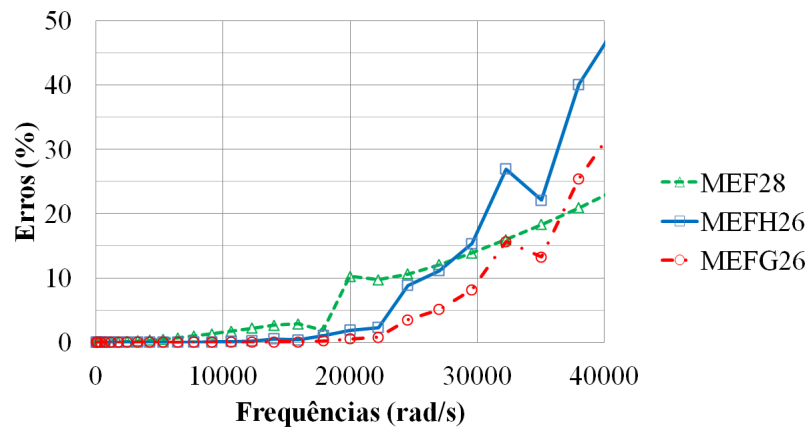
Os erros relativos avaliados de acordo com a equação (6.90) para 26 graus de liberdade (28 no caso do MEF hermitiano) são mostrados na TABELA 7.1 e na FIGURA 7.12.

Os resultados da TABELA 7.1 e da FIGURA 7.12 indicam que o MEF hermitiano é capaz de obter melhores resultados apenas para as frequências mais altas, mas obtém resultados muito inferiores no caso das frequências mais baixas. Já o MEFH polinomial é capaz de obter resultados mais precisos para as frequências mais baixas, mas é superado pelo MEFG para a maior parte das frequências naturais de vibração. Já o MEFG é capaz de obter resultados mais precisos para uma maior gama de frequências naturais de vibração.

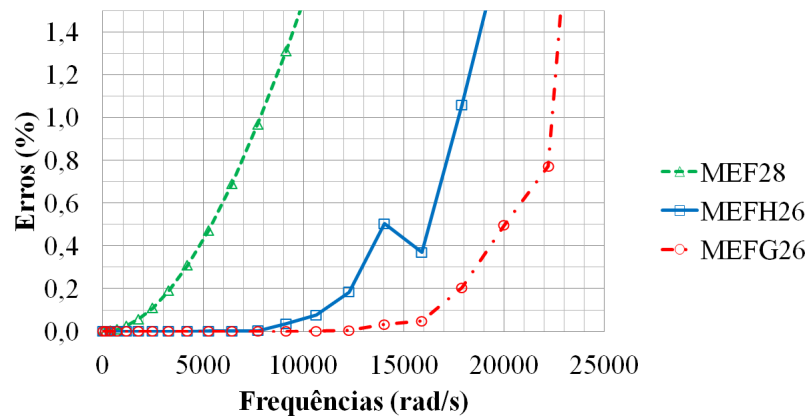
Da TABELA 7.1 nota-se que o MEFH obteve resultados mais precisos para as 8 primeiras frequências de vibração. Porém, estas frequências foram também aproximadas

TABELA 7.1 – EXEMPLO 4: ERROS PERCENTUAIS (%) DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM 26 GRAUS DE LIBERDADE (28 NO CASO DO MEF HERMITIANO).

MODO	FREQ. (rad/s)	MEF28	MEFH26	MEFG26
1	20,801027	8,17E-06	-4,13E-10	3,62E-09
2	130,357810	3,19E-04	9,44E-10	1,20E-07
3	365,005643	2,49E-03	8,27E-10	5,41E-07
4	715,265381	9,49E-03	7,90E-09	8,37E-07
5	1182,384925	2,57E-02	1,67E-08	1,79E-06
6	1766,278343	5,67E-02	8,28E-08	5,70E-06
7	2466,950754	1,09E-01	2,24E-06	1,61E-05
8	3284,401890	1,91E-01	2,43E-05	2,91E-05
9	4218,631769	3,09E-01	3,84E-05	2,92E-05
10	5269,640426	4,73E-01	3,71E-04	5,21E-05



a)



b)

FIGURA 7.12 – EXEMPLO 4: ERROS PERCENTUAIS DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM 26 GRAUS DE LIBERDADE (28 NO CASO DO MEF HERMITIANO), PARA a) AS FREQUÊNCIAS ATÉ 40000rad/s E b) AS FREQUÊNCIAS COM ERRO ATÉ 1,5%.

com grande precisão pelo MEFG. O MEFG, por outro lado, obteve todas as demais frequências com maior precisão do que o MEFH. Da FIGURA 7.12, por exemplo, nota-se que o MEFG obteve mais frequências com erros abaixo de 0,1% e 0,2%. Os resultados obtidos com o MEF hermitiano são bons para as frequências mais altas, porém são menos precisos para as frequências mais baixas.

É interessante também verificar a taxa de convergência dos métodos utilizados. Neste exemplo foram analisados os resultados relativos à aproximação da primeira, da segunda e da décima frequência natural de vibração.

A convergência das aproximações para a primeira frequência natural de vibração quando é realizado o refino do tipo  $h$  é mostrada na FIGURA 7.13. Neste caso, a ordem das aproximações é mantida constante e o número de elementos finitos é aumentado. Os eixos estão em escala logarítmica e o número após o nome das formulações indica o número de funções de aproximação utilizadas por elemento finito. Os mesmos dados são apresentados na TABELA 7.2, considerando o número de graus de liberdade após a imposição das condições de contorno.

Foram utilizados o MEFG e o MEFH com 6 funções de aproximação por elemento finito. No caso do MEFG foi utilizado  $\beta_1 = \pi$ . Quando foram utilizadas mais funções de aproximação os resultados tornaram-se precisos ao ponto de dificultarem a comparação entre os métodos. Por este motivo, os resultados para estes casos não são apresentados. Porém, foi observado que o MEFH polinomial foi superior ao MEFG quando foram utilizadas 8 e 10 funções de aproximação por elemento.

TABELA 7.2 – EXEMPLO 4: ERROS PERCENTUAIS (%) DA PRIMEIRA FREQUÊNCIA NATURAL DE VIBRAÇÃO OBTIDA COM REFINO DO TIPO  $h$ .

N.G.D.L.	MEF4	MEFH6	MEFG6
4	4,8344E-02	1,5392E-04	2,9907E-03
8	3,2708E-03	1,0486E-06	2,0227E-04
12	6,5516E-04	4,3664E-08	4,1281E-05
16	2,0830E-04	4,4646E-09	1,3227E-05
20	8,5511E-05	7,5664E-10	5,4503E-06

N.G.D.L.: NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE DEPOIS DA IMPOSIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO.

É possível notar que o MEFH polinomial foi mais preciso e obteve taxas de convergência mais altas do que o MEFG e o MEF cúbico hermitiano para a aproximação da primeira frequência. O MEFG, por sua vez, foi superior ao MEF hermitiano.

A convergência das aproximações para a primeira frequência de vibração utilizando refino do tipo  $p$  não é apresentada porque, novamente, os resultados foram precisos ao ponto de dificultarem a comparação entre os métodos.

Os resultados do refino do tipo  $p$  para o cálculo da segunda frequência de vibração

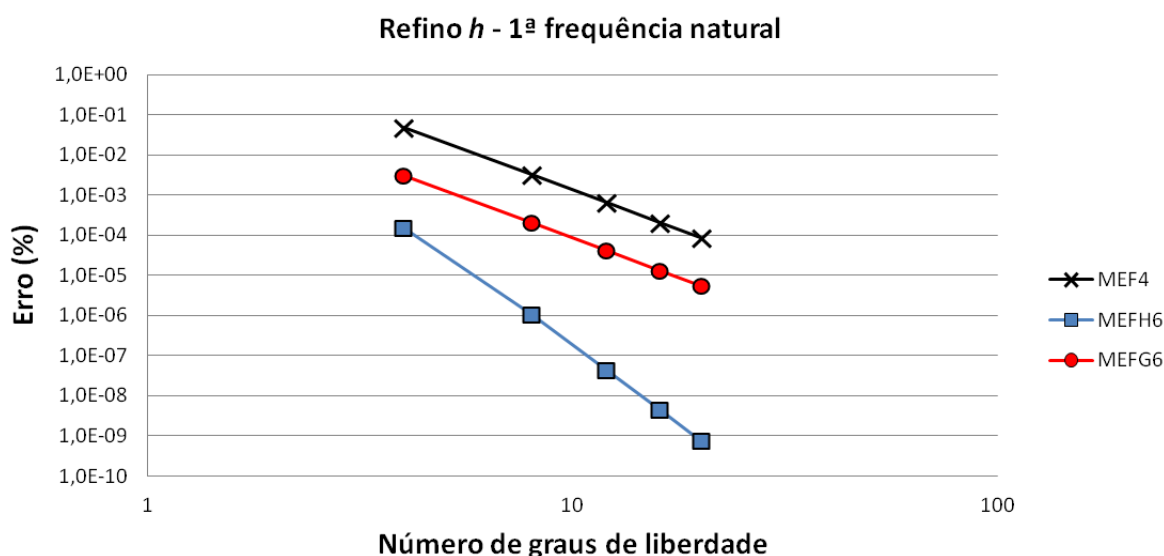


FIGURA 7.13 – EXEMPLO 4: CONVERGÊNCIA DA APROXIMAÇÃO DA PRIMEIRA FREQUÊNCIA NATURAL UTILIZANDO REFINO DO TIPO  $h$ .

O NÚMERO APÓS O NOME DA FORMULAÇÃO INDICA O NÚMERO DE FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO UTILIZADAS POR ELEMENTO FINITO. AMBOS OS EIXOS ESTÃO EM ESCALA LOGARÍTMICA DE BASE 10.

são mostrados na FIGURA 7.14. No caso do MEFG e do MEFH polinomial, os resultados foram obtidos com elementos finitos compostos de 6, 8, 10 e 12 funções de aproximação. Para o MEFG foi utilizado  $\beta_1 = \pi$ ,  $\beta_2 = 3\pi$ ,  $\beta_3 = 5\pi$  e  $\beta_4 = 7\pi$ . Os resultados obtidos com o MEF foram obtidos com refino do tipo  $h$  e são apresentados para efeitos de comparação. Os mesmos dados são apresentados na TABELA 7.3, considerando o número de graus de liberdade após a imposição das condições de contorno.

TABELA 7.3 – EXEMPLO 4: ERROS PERCENTUAIS (%) DA SEGUNDA FREQUÊNCIA NATURAL DE VIBRAÇÃO OBTIDA COM REFINO DO TIPO  $p$ .

N.G.D.L.	MEF	MEFH	MEFG
4	8,4859E-01	5,5976E-01	1,6336E-01
6	3,2843E-01	1,3898E-03	4,9849E-04
8	1,1652E-01	9,2211E-07	7,0511E-06
10	2,4692E-02	3,2900E-10	1,3056E-07

N.G.D.L.: NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE DEPOIS DA IMPOSIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO.

Pode-se notar que o MEFH polinomial possui maior taxa de convergência do que o MEFG para a aproximação da segunda frequência de vibração. Além disso, o MEFG e o MEFH possuem taxa de convergência bastante superior ao refino do tipo  $h$  com o MEF cúbico hermitiano.

A FIGURA 7.15 apresenta a convergência da aproximação da décima frequência



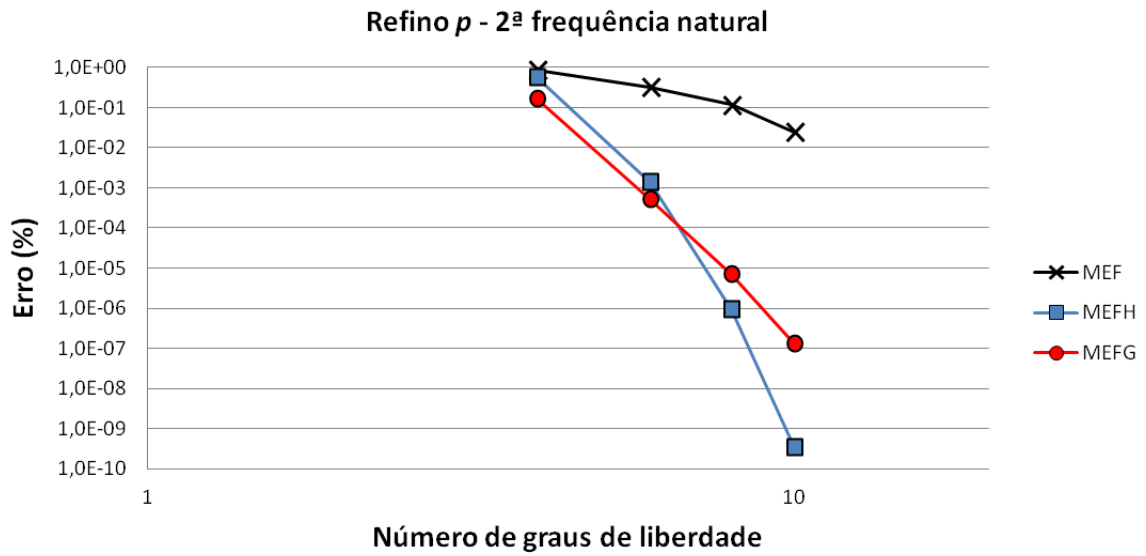


FIGURA 7.14 – EXEMPLO 4: CONVERGÊNCIA DA APROXIMAÇÃO DA SEGUNDA FREQUÊNCIA NATURAL UTILIZANDO REFINO DO TIPO  $p$ . OS RESULTADOS DO MEF FORAM OBTIDOS COM REFINO DO TIPO  $h$  E SÃO APRESENTADOS PARA EFEITOS DE COMPARAÇÃO. AMBOS OS EIXOS ESTÃO EM ESCALA LOGARÍTMICA DE BASE 10.

natural para refino do tipo  $h$ . No caso do MEFH foi testado  $\beta_1 = \pi$  e  $\beta_2 = 3\pi$ . Os mesmos dados são apresentados na TABELA 7.4.

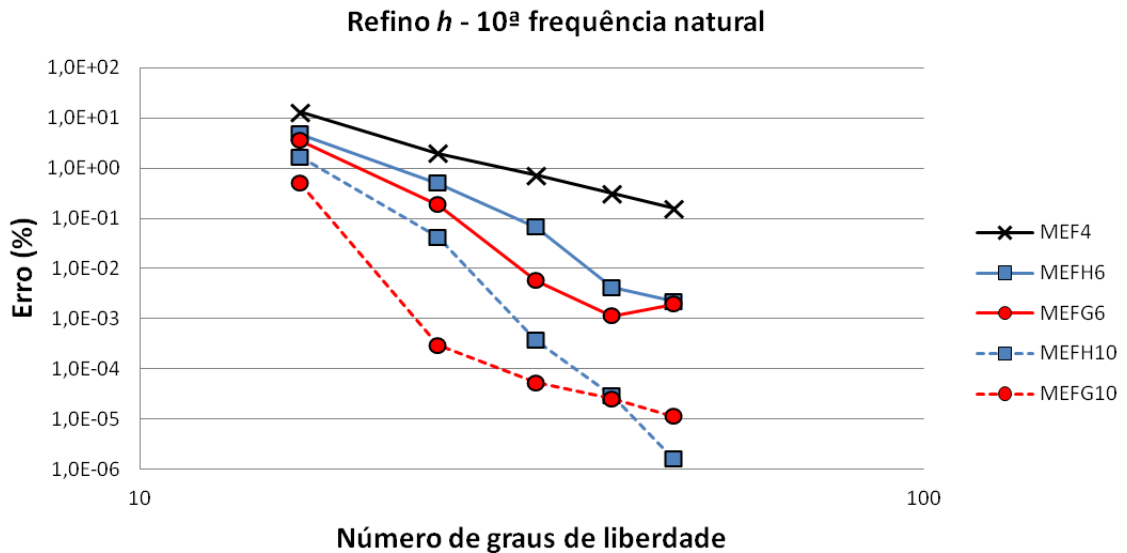


FIGURA 7.15 – EXEMPLO 4: CONVERGÊNCIA DA APROXIMAÇÃO DA DÉCIMA FREQUÊNCIA NATURAL UTILIZANDO REFINO DO TIPO  $h$ . O NÚMERO APÓS O NOME DA FORMULAÇÃO INDICA O NÚMERO DE FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO UTILIZADAS POR ELEMENTO FINITO. AMBOS OS EIXOS ESTÃO EM ESCALA LOGARÍTMICA DE BASE 10.

TABELA 7.4 – EXEMPLO 4: ERROS PERCENTUAIS (%) DA DÉCIMA FREQUÊNCIA NATURAL DE VIBRAÇÃO OBTIDA COM REFINO DO TIPO  $h$ .

N.G.D.L.	MEF4	MEFH6	MEFG6	MEFH10	MEFG10
16	1,3114E+01	4,7705E+00	3,5661E+00	1,6756E+00	5,0624E-01
24	1,9767E+00	4,9908E-01	1,8698E-01	4,2375E-02	2,9943E-04
32	7,3450E-01	6,7079E-02	5,7757E-03	3,7212E-04	5,2653E-05
40	3,1681E-01	4,1628E-03	1,1495E-03	2,9346E-05	2,5811E-05
48	1,5682E-01	2,2461E-03	1,9701E-03	1,5889E-06	1,1426E-05

N.G.D.L.: NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE DEPOIS DA IMPOSIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO.

Nota-se que tanto o MEFH quanto o MEFG obtiveram taxas de convergência mais acentuadas do que o MEF cúbico hermitiano. Os resultados obtidos com o MEFG foram mais precisos do que os obtidos com o MEFH polinomial quando foram utilizados poucos de graus de liberdade. À medida que o número de graus de liberdade foi aumentado, os resultados obtidos com o MEFH polinomial tornaram-se mais precisos do que aqueles obtidos com o MEFG. Além disso, nota-se que a convergência do MEFG com 6 funções de aproximação por elemento finito não é monotônica.

A convergência das aproximações para a décima frequência natural quando é realizado refino do tipo  $p$  é mostrada na FIGURA 7.16. Neste caso, o número de elementos finitos é mantido constante e a ordem da aproximação é aumentada. No caso do MEFH polinomial e do MEFG foram utilizados 4 elementos com 6, 8, 10, 12 e 14 funções de aproximação por elemento. No caso do MEFG foi utilizado  $\beta_1 = \pi$ ,  $\beta_2 = 3\pi$ ,  $\beta_3 = 5\pi$ ,  $\beta_4 = 7\pi$  e  $\beta_5 = 11\pi$ . Os mesmos dados são apresentados na TABELA 7.5.

TABELA 7.5 – EXEMPLO 4: ERROS PERCENTUAIS (%) DA DÉCIMA FREQUÊNCIA NATURAL DE VIBRAÇÃO OBTIDA COM REFINO DO TIPO  $p$ .

N.G.D.L.	MEF4	MEFH	MEFG
16	1,3114E+01	4,7705E+00	3,5661E+00
24	1,9767E+00	7,9566E-02	3,5488E-03
32	7,3450E-01	3,7264E-04	5,2825E-05
40	3,1681E-01	7,6011E-07	1,6218E-06
48	1,5682E-01	3,2889E-07	7,8237E-08

N.G.D.L.: NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE DEPOIS DA IMPOSIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO.

No caso do refino do tipo  $p$ , nota-se que as taxas de convergência do MEFH polinomial e do MEFG são bastante acentuadas. Além disso, são muito maiores do que a taxa de convergência obtida com o refino do tipo  $h$  realizado com o MEF cúbico hermitiano. Neste caso o MEFG obteve resultados mais precisos para quase todos os números de graus de liberdade analisados.

Estes resultados indicam que o MEFH polinomial é mais eficiente para a

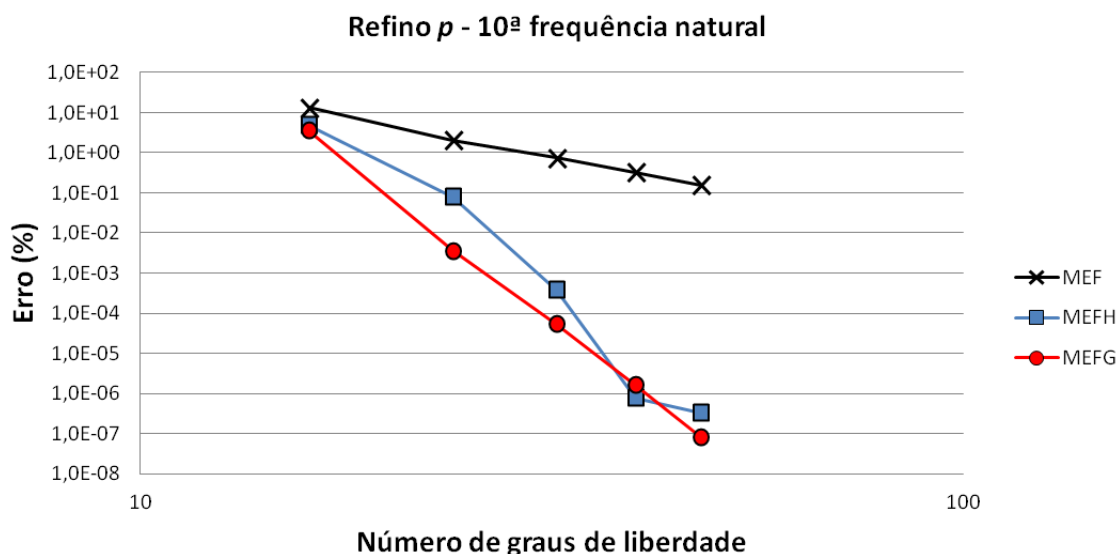


FIGURA 7.16 – EXEMPLO 4: CONVERGÊNCIA DA APROXIMAÇÃO DA DÉCIMA FREQUÊNCIA NATURAL UTILIZANDO REFINO DO TIPO  $p$ . OS RESULTADOS DO MEF FORAM OBTIDOS COM REFINO DO TIPO  $h$  E SÃO APRESENTADOS PARA EFEITOS DE COMPARAÇÃO. AMBOS OS EIXOS ESTÃO EM ESCALA LOGARÍTMICA DE BASE 10.

aproximação das frequências de ordens mais baixas, enquanto o MEFG parece ser mais eficiente para a aproximação das frequências de ordens mais elevadas. Estes resultados confirmam o que foi observado por Arndt (2009) para o problema de barras sujeitas a deslocamentos axiais e vigas sujeitas a deslocamentos transversais.

#### 7.5.2 Exemplo 5: Pórtico sujeito a força harmônica

O segundo exemplo deste capítulo é o de um pórtico em arco sujeito a uma força harmônica mostrado na FIGURA 7.17. A área da seção transversal de todas as vigas é  $A = 0,005\text{m}^2$  e o momento de inércia é  $I = 4,1667 \times 10^{-6}\text{m}^4$ . O módulo elástico do material é  $E = 210\text{GPa}$  e a massa específica é  $\rho = 8000\text{kg/m}^3$ . Apenas os deslocamentos verticais e horizontais dos nós 1 e 7 estão restritos. As coordenadas dos nós são apresentadas na TABELA 7.6.

TABELA 7.6 – EXEMPLO 5: COORDENADAS NODAIS DO PÓRTICO DA FIGURA 7.17.

NÓS	1	2	3	4	5	6	7
X (m)	0,00	1,00	3,00	6,00	9,00	11,00	12,00
Y (m)	0,00	2,00	4,00	4,75	4,00	2,00	0,00

Os dois primeiros modos de vibração desta estrutura possuem frequências próximas a  $\omega_1 = 15,0562\text{rad/s}$  e  $\omega_2 = 42,8278\text{rad/s}$ . A força harmônica é dada pela

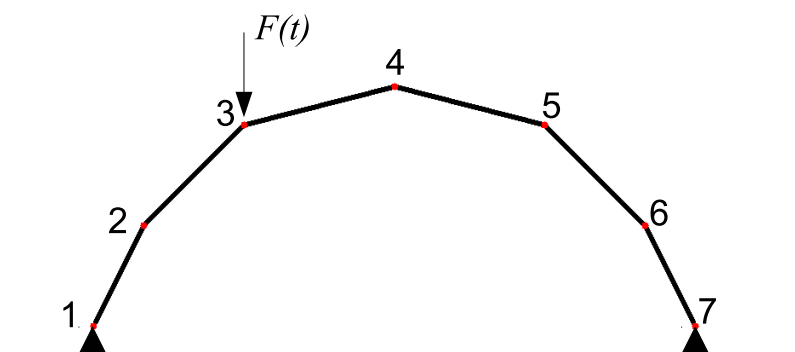


FIGURA 7.17 – EXEMPLO 5: PÓRTICO SUJEITO A FORÇA HARMÔNICA.

equação (7.40) com  $\omega = 1000 \text{ rad/s}$  e  $f = 1 \text{ kN}$ . A análise é feita com o Método de Newmark para um intervalo de tempo de 1s e um passo de tempo de  $\Delta t = 2,5 \times 10^{-4} \text{ s}$ .

Neste exemplo cada viga é modelada utilizando-se um único elemento finito. O número de elementos finitos utilizados é, portanto, igual a 6. As malhas utilizadas com o MEFH são compostas por elementos com a) 6, b) 8 e c) 10 funções de forma. As malhas utilizadas com o MEFG são compostas por elementos com a) 2, b) 4 e c) 6 funções de enriquecimento, o que resulta no mesmo número de graus de liberdade que as malhas utilizadas com o MEFH. Para o MEFG são utilizados  $\beta_1 = \pi$ ,  $\beta_2 = 3\pi$  e  $\beta_3 = 5\pi$ .

Os deslocamentos axiais são aproximados utilizando-se o MEFH polinomial de ordem igual a 5 para barras sujeitas à deslocamentos axiais, como descrito anteriormente, em todos os casos. Optou-se por utilizar a mesma aproximação para deslocamentos axiais em todos os casos para que eventuais diferenças nos resultados possam ser atribuídas apenas à aproximação dos deslocamentos transversais das vigas.

A solução de referência foi obtida com o MEFH polinomial com elementos de ordem 17 para a aproximação dos deslocamentos transversais e ordem 15 para os deslocamentos axiais. Cada viga foi modelada utilizando-se apenas um elemento finito.

Os deslocamentos verticais no nó 3 no intervalo de tempo 0,9s-1,0s são apresentados na FIGURA 7.18, FIGURA 7.19 e FIGURA 7.20, para os diferentes números de funções de aproximação utilizadas. O número após o nome da formulação indica o número de funções de aproximação utilizadas por elemento finito.

Para os resultados obtidos com 6 funções de aproximação por elemento não é possível identificar qual método obteve soluções mais próximas da solução de referência. Porém, quando o número de funções de aproximação é aumentado para 8, os resultados obtidos com o MEFG tornam-se bastante mais precisos do que aqueles obtidos com o MEFH polinomial. Finalmente, quando são utilizadas 10 funções de aproximação por elemento ambos os métodos obtiveram soluções muito semelhantes à solução de

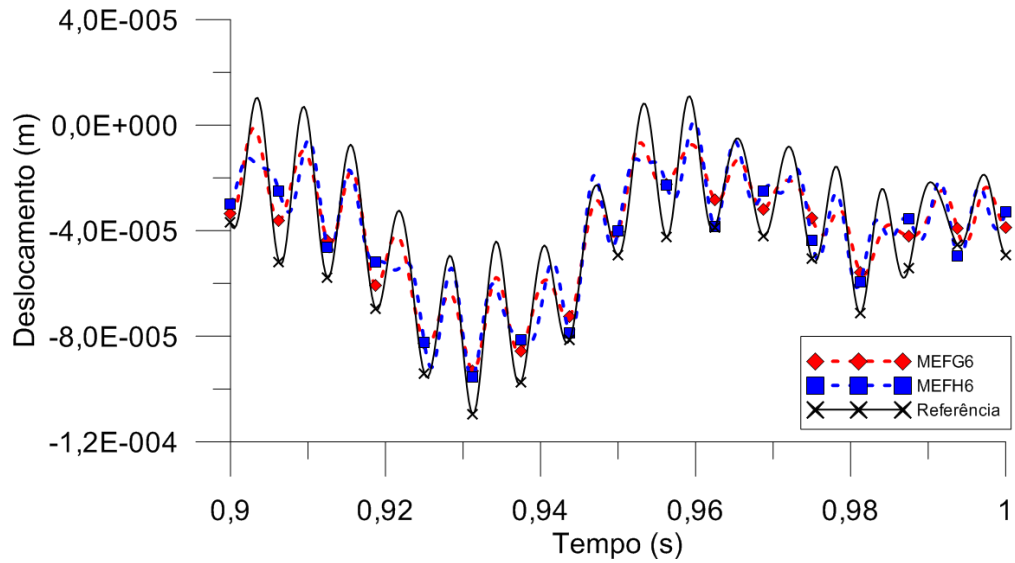


FIGURA 7.18 – EXEMPLO 5: DESLOCAMENTOS VERTICAIS NO NÓ 3 NO INTERVALO 0,9–1,0s OBTIDOS COM AS MALHAS a). O NÚMERO APÓS O NOME DA FORMULAÇÃO INDICA O NÚMERO DE FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO UTILIZADAS POR ELEMENTO FINITO.

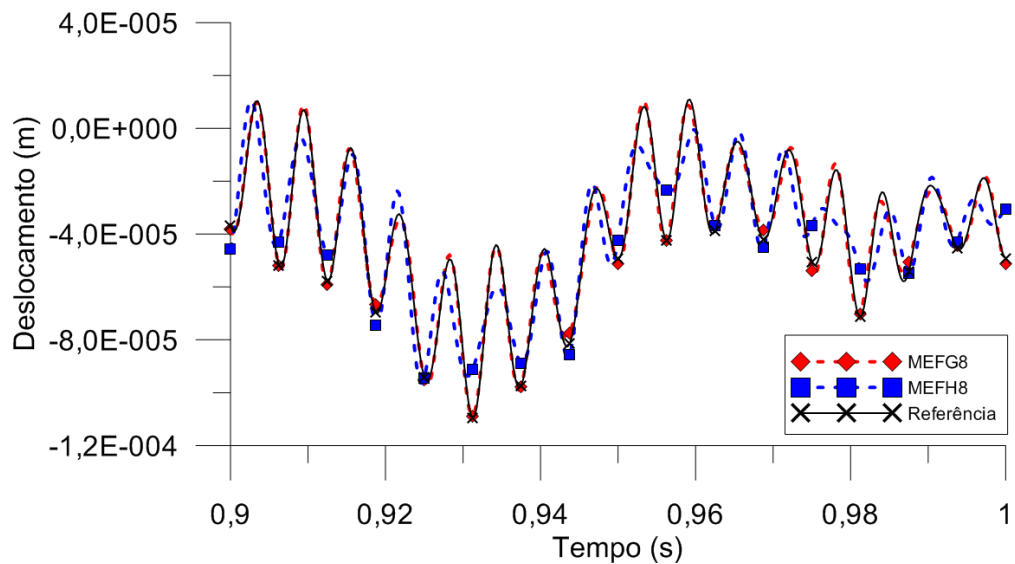


FIGURA 7.19 – EXEMPLO 5: DESLOCAMENTOS VERTICAIS NO NÓ 3 NO INTERVALO 0,9–1,0s OBTIDOS COM AS MALHAS b). O NÚMERO APÓS O NOME DA FORMULAÇÃO INDICA O NÚMERO DE FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO UTILIZADAS POR ELEMENTO FINITO.

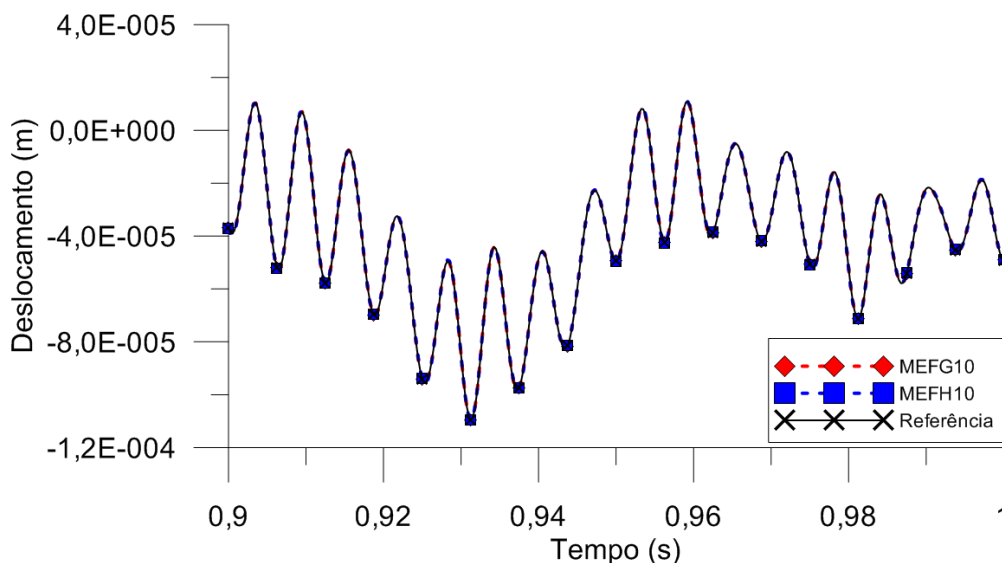


FIGURA 7.20 – EXEMPLO 5: DESLOCAMENTOS VERTICAIS NO NÓ 3 NO INTERVALO 0,9–1,0s OBTIDOS COM AS MALHAS c). O NÚMERO APÓS O NOME DA FORMULAÇÃO INDICA O NÚMERO DE FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO UTILIZADAS POR ELEMENTO FINITO.

referência.

Os deslocamentos horizontais no nó 3 obtidos com 8 funções de aproximação por elemento são apresentados na FIGURA 7.21. Nota-se que estes deslocamentos também foram obtidos com maior precisão com o MCFG.

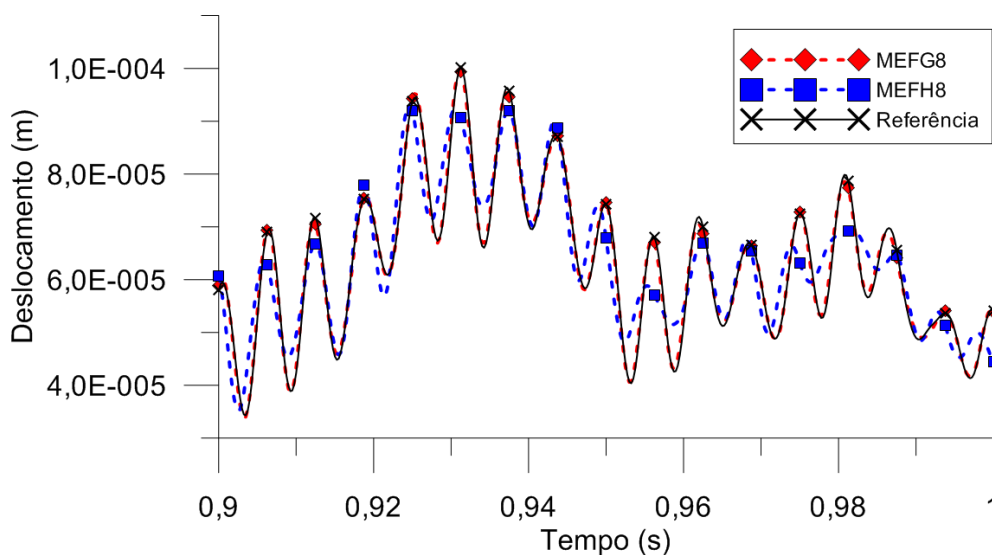


FIGURA 7.21 – EXEMPLO 5: DESLOCAMENTOS HORIZONTAIS NO NÓ 3 NO INTERVALO DE TEMPO 0,9 – 1,0s OBTIDOS COM AS MALHAS b). O NÚMERO APÓS O NOME DA FORMULAÇÃO INDICA O NÚMERO DE FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO UTILIZADAS POR ELEMENTO FINITO.

Para justificar a maior precisão obtida com o MCFG em comparação com o MEFH polinomial é interessante analisar as frequências naturais de vibração do

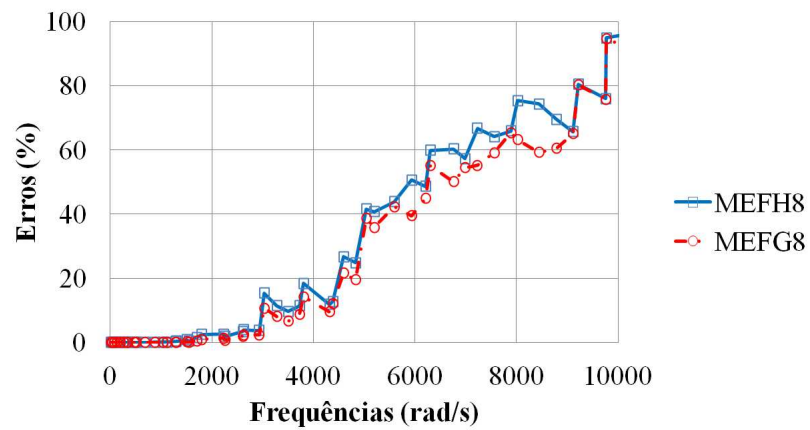
problema. Os erros percentuais das frequências naturais de vibração obtidas com 8 funções de aproximação por elemento, em comparação com a solução de referência, são apresentados na TABELA 7.7 e na FIGURA 7.22.

TABELA 7.7 – EXEMPLO 5: ERROS PERCENTUAIS (%) DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM 8 FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO POR ELEMENTO.

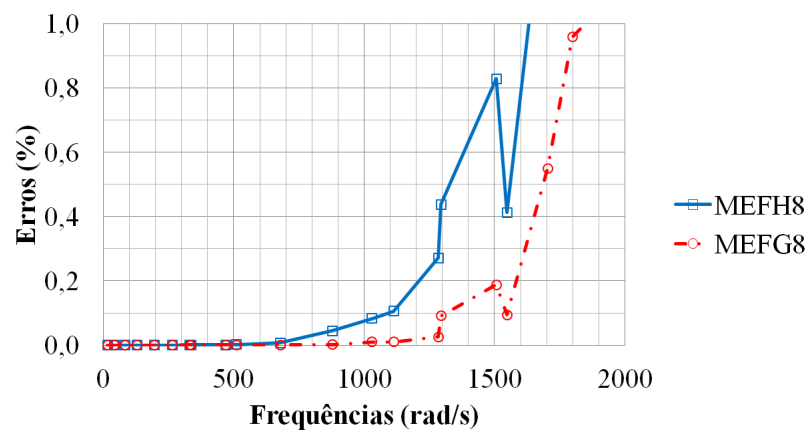
MODO	FREQ. (rad/s)	MEFH8	MEFG8
1	15,056182	7,98E-12	1,50E-06
2	42,827805	2,12E-09	1,21E-05
3	82,683931	1,19E-07	2,13E-05
4	129,726115	1,27E-07	1,05E-05
5	196,139983	2,86E-05	1,27E-05
6	263,144458	6,91E-05	4,19E-05
7	331,245247	1,15E-03	2,93E-04
8	334,528134	4,02E-04	5,29E-05
9	468,918669	6,78E-04	3,73E-04
10	508,423484	1,72E-03	6,64E-05
11	678,675030	6,68E-03	2,14E-04
12	878,512576	4,45E-02	2,23E-03
13	1029,834118	8,30E-02	9,76E-03
14	1112,998151	1,06E-01	1,00E-02
15	1284,216347	2,71E-01	2,59E-02
16	1295,320289	4,38E-01	9,13E-02
17	1506,989427	8,28E-01	1,88E-01
18	1547,496635	4,13E-01	9,43E-02
19	1703,308095	1,50E+00	5,49E-01
20	1799,259668	2,46E+00	9,59E-01

Como observado nos casos anteriores, apenas as primeiras frequências naturais foram aproximadas com maior precisão pelo MEFH. Neste exemplo em particular, apenas as 4 primeiras frequências naturais foram obtidas com maior precisão pelo MEFH. O MEFG obteve todas as demais frequências de vibração com precisão superior.

A FIGURA 7.22b mostra que o MEFG é capaz de obter mais frequências naturais de vibração com erros abaixo de 0,1% ou 0,2%, por exemplo. Isto indica que o MEFG é capaz de obter melhores resultados para uma maior gama de frequências naturais. Além disso, é interessante notar que neste exemplo, a diferença de precisão entre o MEFH e o MEFG para as frequências naturais é mais pronunciada para o intervalo entre 1000rad/s e 1500rad/s. Isto pode ter influenciado o resultado obtido na análise para a resposta no tempo, apresentada na FIGURA 7.19, pois a frequência de excitação do problema é justamente  $\omega = 1000\text{rad/s}$ .



a)



b)

FIGURA 7.22 – EXEMPLO 5: ERROS PERCENTUAIS DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM 8 FUNÇÕES DE APROXIMAÇÃO POR ELEMENTO, PARA a) AS FREQUÊNCIAS DE ATÉ 10000 rad/s E b) AS FREQUÊNCIAS COM ERRO ATÉ 1,0%.



## 8 EQUAÇÃO DA ONDA BIDIMENSIONAL

Neste capítulo, a abordagem do MEFG apresentada anteriormente para o problema de barras  $C^0$ , proposta originalmente por Arndt (2009), é estendida para a equação da onda em duas dimensões. O Método de Newmark é utilizado para a integração no tempo. Os resultados são comparados com aqueles obtidos com o MEFH polinomial padrão.

A equação da onda é governada pela seguinte equação diferencial parcial:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - F(x, y, t), \quad (x, y) \in \Omega \subset R^2, \quad (8.1)$$

onde  $u$  são deslocamentos,  $c$  é a velocidade de propagação da onda e  $F(x, y, t)$  é um termo dependente do tempo, geralmente associado a uma força distribuída ao longo do domínio.

Para obter a forma fraca do problema basta multiplicar por uma função teste  $v(x, y)$  e integrar no domínio, o que resulta em

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) v d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v d\Omega - \int_{\Omega} F(x, y, t) v d\Omega, \quad (8.2)$$

Integrando por partes (DUFFY, 1998) o termo à esquerda da equação (8.2), a equação resultante é

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v d\Omega = \int_{\Gamma} v (\nabla u \cdot \mathbf{n}) d\Gamma + \int_{\Omega} F(x, y, t) v d\Omega, \quad (8.3)$$

onde  $\Gamma = \partial\Omega$  é o contorno do domínio e  $\mathbf{n}$  é um vetor normal ao contorno.

A substituição de  $u$  e  $v$  como escritos na equação (3.6) resulta no seguinte sistema de equações lineares:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}, \quad (8.4)$$

onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez,  $\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamentos,  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa,  $\ddot{\mathbf{u}}$  é o vetor de acelerações e  $\mathbf{F}$  é o vetor de forças aplicadas.

As matrizes de massa e de rigidez e o vetor de forças aplicadas podem ser obtidos somando-se a contribuição de cada elemento finito. Para um dado elemento finito tem-se

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j d\Omega_e = \int_{\Omega_e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) d\Omega_e, \quad (8.5)$$

$$M_{ij}^e = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega_e} \psi_i \psi_j d\Omega_e, \quad (8.6)$$

e

$$F_i^e = \int_{\Gamma_e} \psi_i (\nabla u \cdot \mathbf{n}) d\Gamma_e + \int_{\Omega_e} \psi_i F d\Omega_e, \quad (8.7)$$

onde  $\psi_i$  são as funções de aproximação locais,  $\Omega_e$  é o domínio do elemento finito,  $\Gamma_e$  é o contorno do elemento finito e  $(\nabla u \cdot \mathbf{n})$  é uma condição de contorno natural conhecida.

### 8.1 MEFH POLINOMIAL E MEEG PARA UM ELEMENTO DE REFERÊNCIA

Os elementos finitos utilizados neste trabalho são quadriláteros. No contexto do MEF, quadriláteros de geometria arbitrária podem ser mapeados para um elemento de referência como aquele mostrado na FIGURA 8.1 (HUGHES, 1987; BECKER et al., 1981; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000; BATHE, 1996).

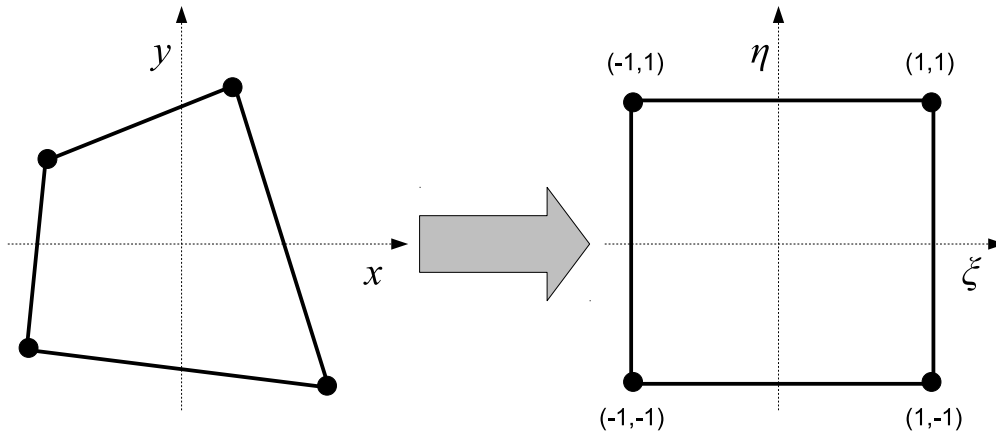


FIGURA 8.1 – MAPEAMENTO DE UM ELEMENTO FINITO COM GEOMETRIA ARBITRÁRIA (COM LADOS RETOS) PARA UM ELEMENTO FINITO QUADRADO COM COORDENADAS LOCAIS  $\xi = [-1, 1]$  E  $\eta = [-1, 1]$ .

As funções de aproximação do elemento finito quadrado da FIGURA 8.1 podem ser obtidas multiplicando-se as funções de aproximação do caso unidimensional. Este procedimento é descrito em detalhes por Solín et al. (2004) e Becker et al. (1981). As funções de forma resultantes para um elemento finito quadrado são

$$\psi_k(\xi, \eta) = l_i(\xi)l_j(\eta), \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (8.8)$$

onde  $\xi = [-1, 1]$  e  $\eta = [-1, 1]$  são as coordenadas locais do elemento e  $n$  é o número de funções de forma unidimensionais  $l_i$  utilizadas. No caso do MEFH polinomial são utilizadas as funções de forma unidimensionais das equações (6.50), (6.51), (6.56), (6.57) e assim por diante.

Para  $n = 2$ , por exemplo, as funções de forma para um elemento quadrado de referência são:

$$\psi_1(\xi, \eta) = l_1(\xi)l_1(\eta), \quad (8.9)$$

$$\psi_2(\xi, \eta) = l_1(\xi)l_2(\eta), \quad (8.10)$$

$$\psi_3(\xi, \eta) = l_2(\xi)l_1(\eta) \quad (8.11)$$

e

$$\psi_4(\xi, \eta) = l_2(\xi)l_2(\eta), \quad (8.12)$$

que são mostradas na FIGURA 8.2.

O mesmo procedimento pode ser utilizado para se obter funções de forma para um elemento finito quadrado para  $n$  arbitrário. O número de funções de forma resultantes será  $n^2$  e a ordem da aproximação polinomial será  $n - 1$ . Detalhes de implementação são discutidos por Solín et al. (2004).

O processo de multiplicação das funções permite transformar qualquer conjunto de funções de aproximação unidimensionais em um conjunto de funções de aproximação bidimensionais para um elemento de referência quadrado.

O processo de multiplicação também pode ser utilizado para gerar as funções de aproximação a serem utilizadas pelo MEFG. Neste caso basta utilizar as funções unidimensionais dadas pelas equações (6.73)-(6.76). A implementação do MEFG, uma vez que as funções de aproximação sejam obtidas, é a mesma do MEFH polinomial.

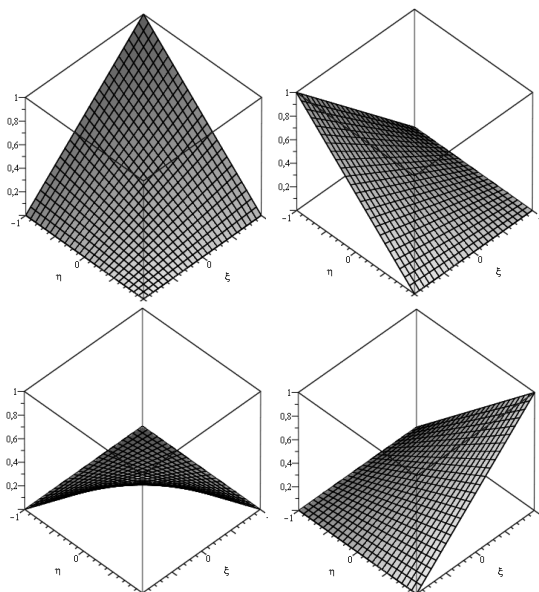


FIGURA 8.2 – FUNÇÕES DE FORMA PARA UM ELEMENTO QUADRADO DE REFERÊNCIA PARA  $n = 2$ .

## 8.2 ASPECTOS DE IMPLEMENTAÇÃO

A implementação do MEFH polinomial apresentada anteriormente é descrita em detalhes por Solín et al. (2004). A implementação do MEFG, uma vez que as funções de aproximação tenham sido obtidas, é idêntica àquela do MEFH polinomial. Neste trabalho foi primeiro implementado o MEFH polinomial no programa MATLAB (MATHWORKS, 2011). As funções do MEFG foram então simplesmente adicionadas às rotinas computacionais desenvolvidas para o MEFH. Isto ocorre porque as funções de forma unidimensionais do MEFG proposto por Arndt (2009) e apresentadas anteriormente possuem diversas características em comum com as funções do MEFH polinomial.

No caso unidimensional, apenas as duas primeiras funções de interpolação do MEFH e do MEFG são não nulas nos nós dos elementos. Quando estas funções são multiplicadas para se obter as funções de aproximação para o caso bidimensional, apenas as quatro primeiras funções, mostradas na FIGURA 8.2, são não nulas nos nós dos elementos finitos. Ou seja, apenas uma função de forma é não nula em cada nó do elemento, como ocorre também para o MEF lagrangeano.

Esta propriedade assegura que as condições de contorno essenciais possam ser aplicadas apenas impondo-se os valores dos graus de liberdade nodais. Em outras palavras, a imposição de condições de contorno essenciais permanece a mesma do MEF lagrangeano padrão. Isto evita que procedimentos especiais de imposição de condições de contorno tenham que ser utilizados, como o Método dos Multiplicadores de Lagrange

ou algum método de penalização (BABUSKA et al., 2003; BREZZI; FORTIN, 1991; CAREY; ODEN, 1983). Além disso, deslocamentos nodais podem ser obtidos diretamente dos graus de liberdade nodais sem necessidade de pós processamento.

Um aspecto importante a ser levado em consideração no caso do MEFG é a integração numérica. Quando são utilizados apenas elementos finitos retangulares, as matrizes de rigidez e de massa podem ser obtidas analiticamente utilizando-se algum programa de manipulação simbólica. As matrizes em forma fechada podem então ser incorporadas às rotinas de análise dinâmica. Neste capítulo todas as matrizes utilizadas foram obtidas analiticamente com o programa Maple (MAPLESOFT, 2009), a não ser pelo último exemplo do capítulo.

No caso geral de elementos quadrilaterais com geometria arbitrária, a integração analítica pode não ser possível. Neste caso torna-se necessária a utilização de integração numérica. Os métodos de integração numérica são muito eficientes para funções polinomiais, pois estas funções podem ser integradas exatamente utilizando-se um número apropriado de pontos de integração (HUGHES, 1987; BATHE, 1996; QUARTERONI et al., 2007). Porém, no caso do MEFG as funções de aproximação podem ser não polinomiais e, portanto, a integração numérica exata pode não ser possível. Este é um aspecto delicado do MEFG e é abordado em maiores detalhes por Strouboulis et al. (2000, 2001), Babuska et al. (2004), Duarte e Kim (2008) e Mousavi e Sukumar (2010). De forma geral, sabe-se que a integração numérica no caso do MEFG tende a ser mais onerosa computacionalmente do que no caso do MEF polinomial convencional. Apenas o último exemplo deste capítulo utiliza integração numérica e os detalhes são explicados na apresentação do problema.

Observou-se que o sistema de equações resultantes do MEFG pode tornar-se mal condicionado (singular ou quase singular) em algumas situações (STROUBOULIS et al., 2000; BABUSKA et al., 2004). Para evitar esta dificuldade, alguns autores propuseram esquemas iterativos de perturbações, de modo a melhorar o condicionamento dos sistemas de equações (STROUBOULIS et al., 2000; BABUSKA et al., 2004). Além disso, uma modificação do MEFG para tornar a matriz de rigidez bem condicionada foi apresentada por Babuska e Banerjee (2012).

No caso do MEFG proposto aqui observou-se que a utilização de  $\beta_k \geq \pi/2$  é suficiente para se evitar sistemas de equações mal condicionados. Porém, foi observado que o refino do tipo  $p$ , quando as funções foram geradas para diversos valores de  $\beta_k$ , ocasionou sistemas mal condicionados. O estudo mais aprofundado do condicionamento dos sistemas de equações constitui um interessante tópico para trabalhos futuros.

As funções de aproximação de um elemento quadrilateral podem ser classificadas, de acordo com Solín et al. (2004), em: funções nodais, funções bolha e funções de borda.

As funções nodais são aquelas mostradas na FIGURA 8.2, que são não nulas nos nós do elemento. As funções bolha são aquelas mostradas na FIGURA 8.3, que são não nulas apenas dentro do domínio do elemento. As funções de borda são aquelas mostradas na FIGURA 8.3, que são não nulas apenas dentro do domínio do elemento e sobre alguma borda do elemento, mas que são nulas em todos os nós. Esta classificação foi proposta para o MEFH polinomial mas também é válida para o MEFG como proposto aqui.

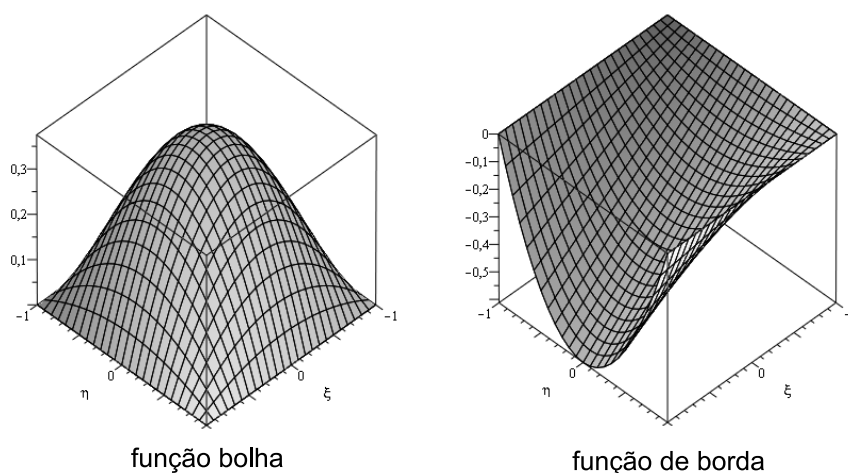


FIGURA 8.3 – FUNÇÕES BOLHA E DE BORDA

Como as bordas podem ser compartilhadas entre dois elementos adjacentes, os graus de liberdade de borda devem ser definidos de acordo. Este fato é evidenciado pelo exemplo da FIGURA 8.4. Neste caso, os dois elementos finitos possuem uma borda em comum que foi colocada em evidência. As funções de borda de ambos os elementos devem, portanto, definir um único grau de liberdade, de forma a garantir conformidade da aproximação. A situação é como mostrada na FIGURA 8.5. É então necessário mapear as bordas compartilhadas entre os elementos. Mais detalhes sobre este assunto são discutidos por Solín et al. (2004) para o MEFH polinomial e valem também para o MEFG como proposto aqui.

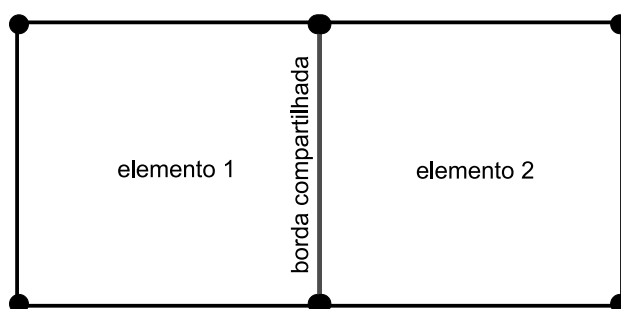


FIGURA 8.4 – UMA MALHA COMPOSTA POR DOIS ELEMENTOS FINITOS

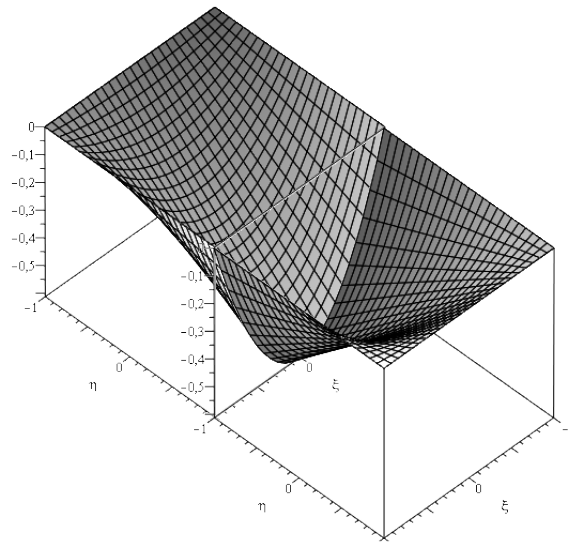


FIGURA 8.5 – AS FUNÇÕES DE BORDA COMPARTILHADAS POR DOIS ELEMENTOS FINITOS.

### 8.3 RESULTADOS

#### 8.3.1 Exemplo 6: frequências naturais de vibração de uma membrana

O primeiro exemplo relacionado à equação da onda é aquele da membrana mostrada na FIGURA 8.6. Este problema é regido pela equação (8.1) com as seguintes condições de contorno:

$$u(x = 0, y) = 0, \quad (8.13)$$

$$u(x = L_x, y) = 0, \quad (8.14)$$

$$u(x, y = 0) = 0 \quad (8.15)$$

e

$$u(x, y = L_y) = 0, \quad (8.16)$$

onde  $L_x$  e  $L_y$  determinam o tamanho do domínio do problema.

Este exemplo foi utilizado para a comparação entre frequências naturais de vibração analíticas e aproximadas. As frequências analíticas podem ser obtidas

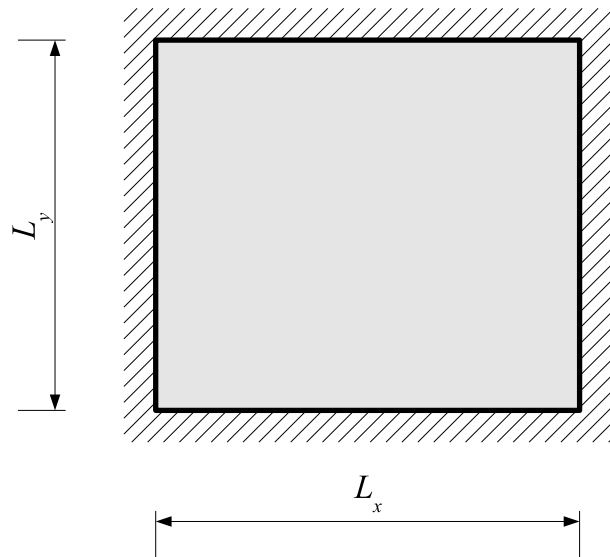


FIGURA 8.6 – EXEMPLO 6: MEMBRANA UTILIZADA PARA SE ESTUDAR AS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO.

aplicando-se a separação de variáveis e são apresentadas por Greenberg (1998), Kreyszig (2006) e Duffy (1998). Estas frequências são

$$\omega_{mn} = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}} \quad (\text{rad/s}), m, n = 1, 2, \dots \quad (8.17)$$

Neste exemplo foi utilizado  $L_x = L_y = 1\text{m}$  e  $c = 1\text{m/s}$ . As frequências naturais de vibração também foram obtidas utilizando-se o MEFH polinomial e o MEFG. Em ambos os casos o domínio foi dividido em 64 elementos finitos quadrados, obtidos dividindo-se cada lado em 8 elementos finitos. Neste trabalho esta malha é representada por 8x8, indicando o número de elementos finitos em cada lado do domínio.

As funções de aproximação de cada elemento finito foram obtidas com  $n = 6$ , o que resulta em 36 funções de aproximação por elemento. Para o caso do MEFH polinomial esta aproximação é de quinta ordem. O MEFG foi testado com três diferentes valores de  $\beta_1$ :  $\pi$ ,  $2\pi$  e  $3\pi$ . Os erros relativos entre as frequências exatas e aquelas aproximadas foram avaliados de acordo com a equação (6.90).

Os erros relativos entre as frequências de vibração exatas e aproximadas são mostrados na FIGURA 8.7 e na FIGURA 8.8. Na FIGURA 8.7 os erros para todas as frequências são apresentados, enquanto na FIGURA 8.8 apenas os erros para as frequências mais baixas são apresentados. É importante salientar que os resultados são valores discretos. Porém, os marcadores foram removidos da FIGURA 8.7 para



possibilitar uma melhor visualização dos resultados. Os marcadores também foram removidos na apresentação de outros resultados apresentados mais adiante.

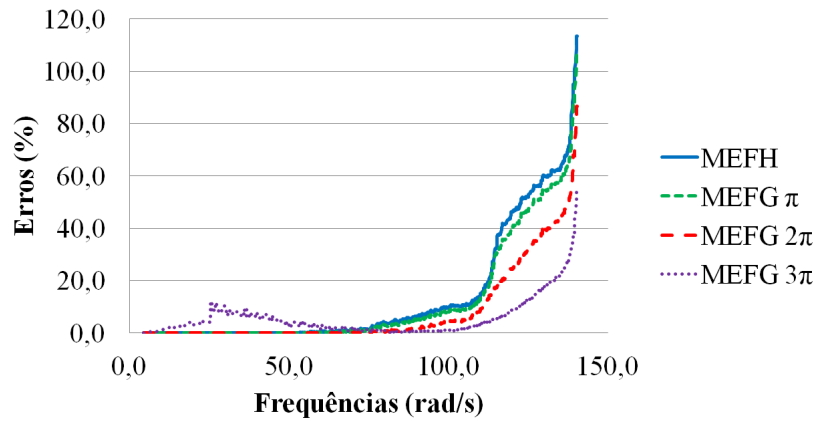


FIGURA 8.7 – EXEMPLO 6: ERROS RELATIVOS PARA AS FREQUÊNCIAS NATURAIS OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM DIFERENTES VALORES DE  $\beta_1$ .

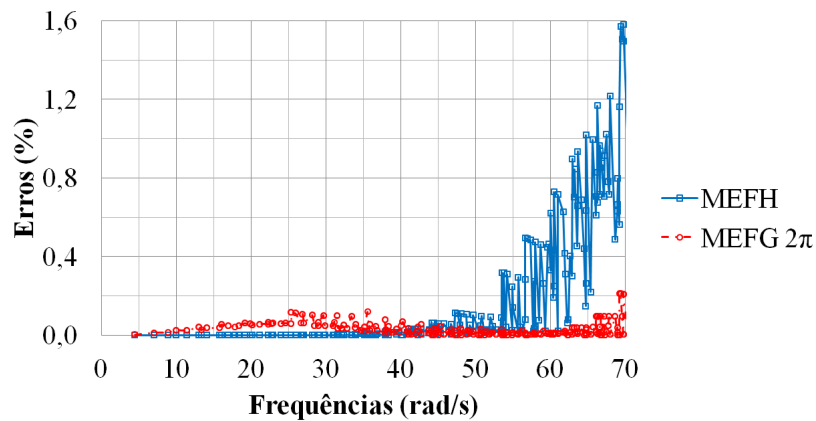


FIGURA 8.8 – EXEMPLO 6: ERROS RELATIVOS PARA AS FREQUÊNCIAS NATURAIS MAIS BAIXAS OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM  $\beta_1 = 2\pi$ .

Da FIGURA 8.7 pode-se notar que diferentes valores de  $\beta_k$  para o MEFG resultam em diferentes faixas de frequências obtidas com maior precisão. Para o MEFG com  $\beta_1 = 3\pi$ , os erros das frequências de vibração mais elevadas foram menores do que aqueles obtidos com os outros métodos. Porém, as frequências mais baixas foram mal aproximadas neste caso. Para  $\beta_1 = \pi$  e  $\beta_1 = 2\pi$  o MEFG ainda foi capaz de obter melhores resultados do que o MEFH para as frequências mais altas, mas sem comprometer severamente a precisão das frequências mais baixas.

Uma visualização mais detalhada dos erros relativos obtidos para as frequências mais baixas é apresentada na FIGURA 8.8, onde apenas o MEFH polinomial e o MEFG com  $\beta_1 = 2\pi$  são comparados. Neste caso, os erros obtidos com o MEFG são maiores

do que aqueles obtidos com o MEFH polinomial até aproximadamente 40rad/s. Todas as demais frequências foram melhor aproximadas pelo MEFG.

Os erros obtidos com o MEFG para todas as frequências até 70rad/s são menores do que aproximadamente 0,2%, enquanto os erros obtidos com o MEFH são menores do que este limite apenas até aproximadamente 55rad/s. O limite superior dos erros obtidos com o MEFH para as frequências entre 70rad/s é de aproximadamente 1,6%, que são erros bastante superiores aqueles obtidos com o MEFG para a mesma faixa de frequências.

Uma comparação semelhante é apresentada na FIGURA 8.9. Neste caso, apenas as frequências com erros menores que 5% são mostradas. Os resultados obtidos com o MEFG obtiveram erros menores do que 5% até aproximadamente 105rad/s. Já os resultados obtidos com o MEFH obtiveram tal precisão apenas até 85rad/s.

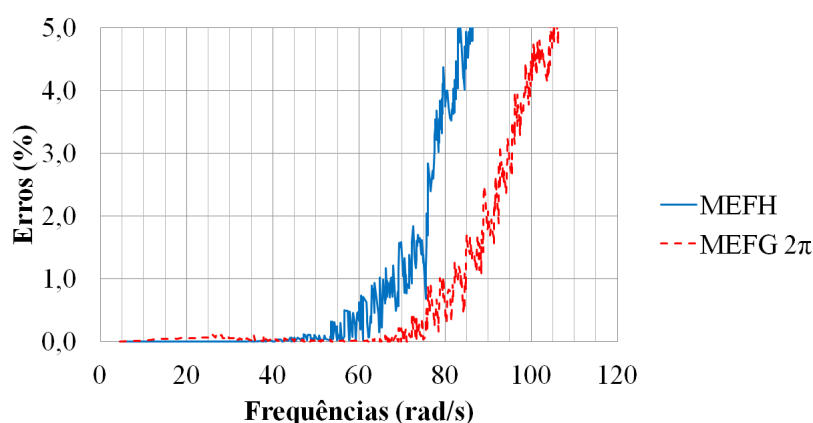


FIGURA 8.9 – EXEMPLO 6: ERROS RELATIVOS OBTIDOS COM O MEFH E O MEFG COM  $\beta_1 = 2\pi$  PARA AS FREQUÊNCIAS NATURAIS COM ERROS MENORES QUE 5%.

Os erros relativos para as primeiras 10 frequências são apresentados na TABELA 8.1. Pode-se notar que as frequências mais baixas foram aproximadas com maior precisão pelo MEFH polinomial. Porém, os erros obtidos para estas frequências com o MEFG com  $\beta_1 = \pi$  e  $\beta_1 = 2\pi$  são menores do que 0,05%, que é uma tolerância aceitável para a maior parte das aplicações práticas.

Uma comparação entre o MEFH polinomial e o MEFG com  $\beta_1 = 2\pi$  utilizando outras malhas é apresentada na FIGURA 8.10. As malhas foram obtidas dividindo-se cada lado em 2x2 e 4x4 elementos finitos. Os erros para as primeiras 5 frequências de vibração são também apresentados na Tab 8.2.

Da FIGURA 8.10 pode-se notar que o MEFG obteve resultados mais precisos para as frequências mais altas novamente. O MEFH obteve erros menores para as frequências mais baixas, como pode ser visto na TABELA 8.2, mas estas são as frequências que são aproximadas bastante bem também pelo MEFG.

TABELA 8.1 – EXEMPLO 6: ERROS RELATIVOS (%) PARA AS 10 PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM DIFERENTES VALORES DE  $\beta_1$ .

FREQ. (rad/s)	MEFH	MEFG $\pi$	MEFG $2\pi$	MEFG $3\pi$
4,4429	4,5979E-13	8,0566E-06	3,5720E-03	1,7700E-01
7,0248	3,5046E-10	2,2612E-05	1,1516E-02	5,8908E-01
7,0248	3,5046E-10	2,2612E-05	1,1516E-02	5,8908E-01
8,8858	4,3800E-10	2,6251E-05	1,3502E-02	6,9184E-01
9,9346	2,2353E-08	3,7725E-05	2,5203E-02	1,3628E+00
9,9346	2,2353E-08	3,7725E-05	2,5203E-02	1,3628E+00
11,3272	1,7329E-08	3,6477E-05	2,3266E-02	1,2476E+00
11,3272	1,7329E-08	3,6477E-05	2,3266E-02	1,2476E+00
12,9531	4,0541E-07	3,9379E-05	4,0488E-02	2,3561E+00
12,9531	4,0541E-07	3,9379E-05	4,0488E-02	2,3561E+00

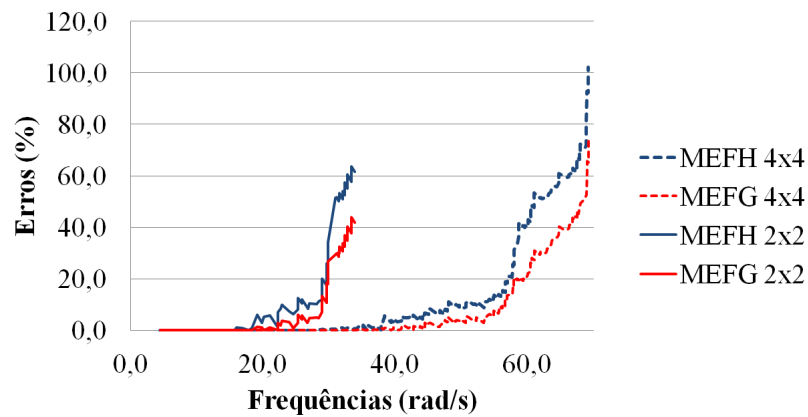


FIGURA 8.10 – EXEMPLO 6: ERROS RELATIVOS OBTIDOS COM O MEFH E O MEFG COM  $\beta_1 = 2\pi$  UTILIZANDO MALHAS 2X2 E 4X4.

TABELA 8.2 – EXEMPLO 6: ERROS RELATIVOS (%) PARA AS 5 PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM  $\beta_1 = 2\pi$  COM MALHAS 2X2 E 4X4.

MODO	FREQ. (rad/s)	MEFH 2x2	MEFH 4x4	MEFG 2x2	MEFG 4x4
1	4,4429	4,3075E-07	4,3800E-10	4,2795E-02	1,3502E-02
2	7,0248	5,8864E-04	3,4469E-07	1,0346E-01	3,6937E-02
3	7,0248	5,8864E-04	3,4469E-07	1,0346E-01	3,6937E-02
4	8,8858	7,3569E-04	4,3075E-07	1,1862E-01	4,2795E-02
5	9,9346	1,4675E-02	2,0889E-05	1,5163E-02	5,8753E-02

Da TABELA 8.2, nota-se que a quinta frequência natural foi melhor aproximada com o MEFG com a malha 2x2 do que com a malha 4x4. Este tipo de comportamento pode ser observado para o MEFG como proposto aqui pois não há garantia de convergência monotônica para as frequências naturais, como discutido na Seção 6.5.2. Mesmo assim, da FIGURA 8.10 pode-se perceber que o refino  $h$  da malha tende a reduzir os erros para a grande maioria das frequências.

Estes resultados indicam que é possível obter melhores resultados para uma maior faixa de frequências naturais com o MEFG. Isto ocorre porque o MEFG parece ser bastante superior para a aproximação das frequências mais altas de vibração. O MEFH é capaz de obter resultados mais precisos para as frequências mais baixas, porém a precisão destas frequências não costuma ser um problema.

A obtenção de modos de vibração mais precisos pode ser uma vantagem quando a análise dinâmica busca as respostas no tempo através de algum esquema de integração no tempo. Neste caso, diversos modos de vibração podem contribuir para a resposta e, portanto, é necessário obter o maior número possível de modos com boa precisão. Este fato torna-se evidente nos próximos exemplos.

É interessante também estudar a taxa de convergência do MEFG e do MEFH polinomial para a aproximação das frequências naturais de vibração. Neste caso será estudado apenas a convergência em relação ao refino do tipo  $h$ , pois a formulação apresentada aqui para o MEFG mostrou-se mal condicionada quando o refino do tipo  $p$  foi realizado. Foram estudadas as convergências das aproximações da primeira e da centésima frequência de vibração, de modo a verificar o comportamento dos métodos para a aproximação de frequências com magnitudes baixas e altas. As malhas foram construídas utilizando-se elementos quadrados, de forma que a discretização nas direções horizontal e vertical fossem iguais.

A FIGURA 8.11 apresenta a convergência das aproximações para a primeira frequência de vibração natural quando o refino do tipo  $h$  é realizado. Para o MEFG foram testados  $\beta_1 = \pi$  e  $\beta_1 = 3\pi/2$ . Neste caso é possível observar que tanto o MEFH quanto o MEFG obtiveram resultados mais precisos do que o MEF linear. Porém, o MEFH polinomial obteve resultados mais precisos e uma taxa de convergência mais acentuada do que o MEFG. Os mesmos dados são apresentados na TABELA 8.3.

A convergência das aproximações para a centésima frequência natural, quando o refino do tipo  $h$  é utilizado, é mostrada na FIGURA 8.12. Esta frequência natural de vibração é igual a 37,82978507rad/s. Os mesmos dados são apresentados na TABELA 8.4.

Para a aproximação da centésima frequência natural, nota-se que o MEFG é mais preciso do que o MEFH polinomial. O MEFG com  $\beta_1 = 3\pi/2$  obteve os melhores

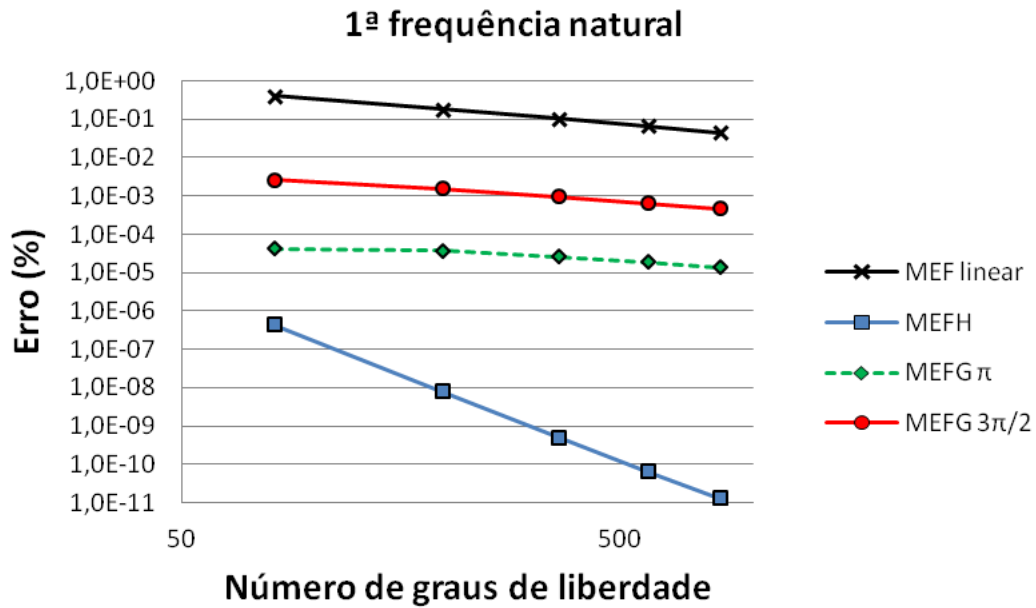


FIGURA 8.11 – EXEMPLO 6: CONVERGÊNCIA DA APROXIMAÇÃO DA PRIMEIRA FREQUÊNCIA NATURAL UTILIZANDO REFINO DO TIPO  $h$ .

AMBOS OS EIXOS ESTÃO EM ESCALA LOGARÍTMICA DE BASE 10.

TABELA 8.3 – EXEMPLO 6: ERROS PERCENTUAIS (%) DA PRIMEIRA FREQUÊNCIA NATURAL DE VIBRAÇÃO OBTIDA COM REFINO DO TIPO  $h$ .

N.G.D.L.	MEF LINEAR	MEFH	MEFH $\pi$	MEFH $3\pi/2$
81	4,1173E-01	4,3176E-07	4,1317E-05	2,5814E-03
196	1,8287E-01	7,9471E-09	3,7323E-05	1,5446E-03
361	1,0284E-01	4,9338E-10	2,6247E-05	9,6019E-04
576	6,5810E-02	6,3032E-11	1,8558E-05	6,4319E-04
841	4,5699E-02	1,3054E-11	1,3592E-05	4,5777E-04

N.G.D.L.: NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE DEPOIS DA IMPOSIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO.

TABELA 8.4 – EXEMPLO 6: ERROS PERCENTUAIS (%) DA CENTÉSIMA FREQUÊNCIA NATURAL DE VIBRAÇÃO OBTIDA COM REFINO DO TIPO  $h$ .

N.G.D.L.	MEF LINEAR	MEFH	MEFH $\pi$	MEFH $3\pi/2$
196	1,4019E+01	7,3335E+00	5,9767E+00	4,5490E+00
361	7,9813E+00	2,9103E-01	1,4222E-01	4,0279E-02
576	4,8777E+00	5,7566E-02	1,4404E-02	5,9348E-04
841	3,3834E+00	1,1571E-02	1,1443E-03	1,8209E-05
1156	2,4824E+00	2,8175E-03	6,6804E-05	2,4057E-04
1521	1,8984E+00	9,6421E-04	1,4858E-06	1,8196E-06

N.G.D.L.: NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE DEPOIS DA IMPOSIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO.

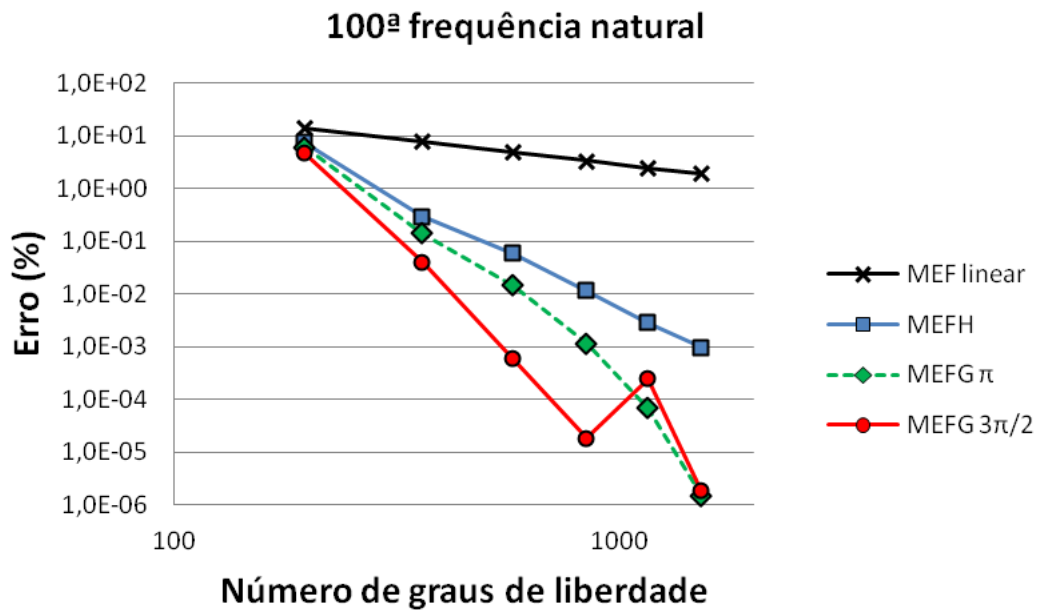


FIGURA 8.12 – EXEMPLO 6: CONVERGÊNCIA DA APROXIMAÇÃO DA CENTÉSIMA FREQUÊNCIA NATURAL UTILIZANDO REFINO DO TIPO  $h$ .

AMBOS OS EIXOS ESTÃO EM ESCALA LOGARÍTMICA DE BASE 10.

resultados e a maior taxa de convergência até quando foram utilizados 841 graus de liberdade. Quando a discretização foi refinada posteriormente o erro da aproximação aumentou, indicando que a convergência pode não ser monotônica em alguns casos. Já o MEFG com  $\beta_1 = \pi$  obteve uma taxa de convergência superior àquela obtida com o MEFH polinomial e apresentou convergência monotônica para os dados analisados. Já as aproximações obtidas com o MEF linear são menos precisas do que aquelas obtidas com o MEFG e com o MEFH polinomial.

Além disso, é importante notar que o MEFG com  $\beta_1 = 3\pi/2$  obteve uma melhor aproximação para a centésima frequência com 576 graus de liberdade do que o MEFH polinomial com 1521 graus de liberdade.

Estes resultados concordam com o que foi observado por Arndt (2009) em seu estudo para barras sujeitas à esforços axiais. É possível notar que o MEFH polinomial é capaz de obter boas aproximações para as frequências de vibração com magnitude mais baixas. Já o MEFG é superior para a aproximação das frequências mais elevadas. Além disso, o MEF linear apresenta aproximações pouco precisas em comparação com os outros dois métodos.

### 8.3.2 Exemplo 7: membrana sujeita a condições de contorno dependentes do tempo

O segundo exemplo deste capítulo é aquele mostrado na FIGURA 8.13. Este problema possui as seguintes condições de contorno e iniciais:

$$u(x = 0, y, t) = 0, \quad (8.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x = L_x, y, t) = \text{sen}(\omega t), \quad (8.19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y = 0, t) = 0 \quad (8.20)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y = L_y, t) = 0, \quad (8.21)$$

onde  $\omega$  é a frequência de excitação da condição de contorno. A condição de contorno da equação (8.19) é equivalente a uma força dependente do tempo. A membrana encontra-se inicialmente em repouso, com deslocamentos e velocidades nulas.

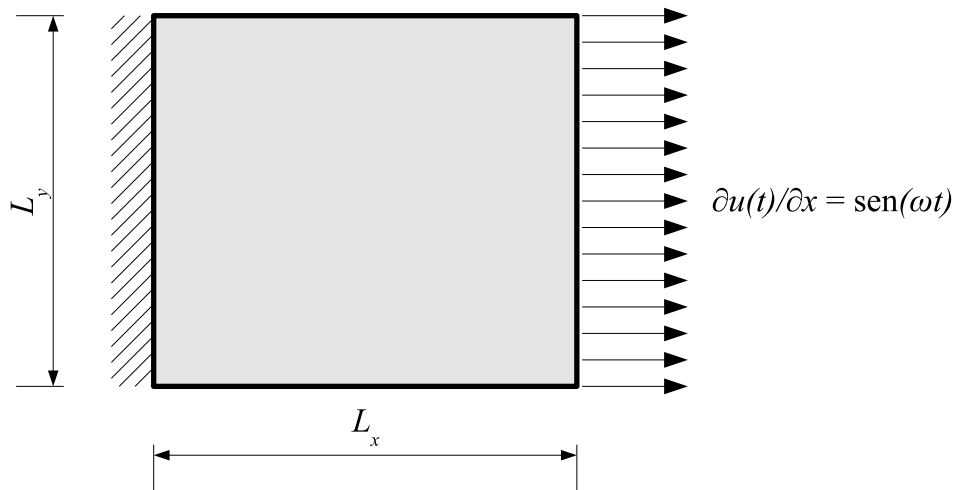


FIGURA 8.13 – EXEMPLO 7: MEMBRANA SUJEITA A CONDIÇÕES DE CONTORNO DEPENDENTES DO TEMPO.

As frequências naturais de vibração analíticas podem ser obtidas por separação de variáveis e são

$$\omega_{mn} = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{(2L_x)^2} + \frac{n^2}{L_y^2}} \quad (\text{rad/s}), m = 1, 3, 5, \dots, n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.22)$$

O problema com as condições de contorno dadas pelas equação (8.18)-(8.21) pode ser modelado como um problema unidimensional, uma vez que não ocorrem variações na direção do eixo  $y$ . Assumindo  $L_x = 1\text{m}$  e deslocamentos iniciais e velocidades iniciais nulas, a solução analítica é a mesma apresentada para o Exemplo 2.

Neste exemplo foi utilizado  $L_x = L_y = 1\text{m}$  e  $c = 1\text{m/s}$ . Além disso, as aproximações do MEFH polinomial e do MEFG foram obtidas com  $n = 6$ , sendo que no caso do MEFG foi utilizado  $\beta_1 = 2\pi$ . Os erros relativos entre as frequências naturais exatas e as aproximadas são apresentadas na FIGURA 8.14 para uma malha dada por 6x6 elementos. Nota-se que os modos mais altos de vibração foram melhor aproximados pelo MEFG.

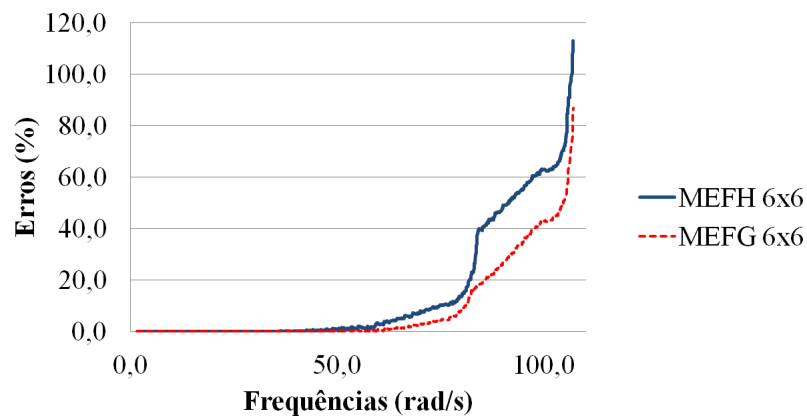


FIGURA 8.14 – EXEMPLO 7: ERROS RELATIVOS PARA AS FREQUÊNCIAS NATURAIS OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM  $\beta_1 = 2\pi$  UTILIZANDO MALHAS DADAS POR 6X6 ELEMENTOS FINITOS.

Na FIGURA 8.15 apenas as frequências naturais com erros menores que 5% são mostradas. Neste caso, nota-se que o MEFG obteve erros menores que 5% até aproximadamente 77rad/s, enquanto o MEFH obteve a mesma precisão apenas até 65rad/s. O MEFG também obteve uma maior gama de frequências com erro menor que 1%. Estes fatos indicam que o MEFG obteve melhores resultados gerais para uma maior faixa de frequências.

Para a análise de reposta no tempo o domínio foi dividido em 6 elementos na direção de  $x$  e em 2 elementos na direção de  $y$ . A malha não é uniforme porque as variações ocorrem apenas na direção de  $x$ . O passo de tempo utilizado no Método de Newmark foi  $\Delta t = 5 \times 10^{-4}\text{s}$ . O exemplo foi estudado para três diferentes frequências de excitação:  $\omega = 30\text{rad/s}$ ,  $\omega = 40\text{rad/s}$  e  $\omega = 50\text{rad/s}$ .



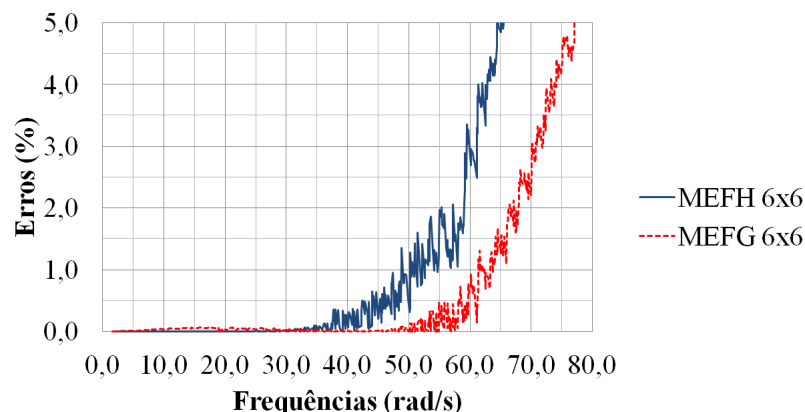


FIGURA 8.15 – EXEMPLO 7: ERROS RELATIVOS PARA AS FREQUÊNCIAS NATURAIS COM ERROS MENORES QUE 5%, OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM  $\beta_1 = 2\pi$ .

Os deslocamentos no centro da membrana para  $\omega = 30\text{rad/s}$  são apresentados na FIGURA 8.16. Os erros avaliados de acordo com a equação (5.7) foram iguais a 0,0040m.s para o MEFH e 0,0022m.s para o MEFG. Isto indica que o MEFG obteve resultados mais precisos, mesmo que este fato não seja evidente da FIGURA 8.16.

Os deslocamentos no centro da membrana para  $\omega = 40\text{rad/s}$  são mostrados na FIGURA 8.17. Os erros avaliados de acordo com a equação (5.7) foram iguais a 0,0197m.s para o MEFH e 0,0034m.s para o MEFG. Uma inspeção mais detalhada da FIGURA 8.17 revela que os deslocamentos obtidos com o MEFG são realmente mais próximos da solução analítica do problema.

Os deslocamentos no centro da membrana para  $\omega = 50\text{rad/s}$  são mostrados na FIGURA 8.18. Os erros avaliados de acordo com a equação (5.7) foram iguais a 0,0590m.s com o MEFH e 0,0081m.s com o MEFG. Pode-se notar que, neste caso, os deslocamentos obtidos com o MEFG são bastante mais próximos da solução analítica.

Os erros obtidos com diferentes frequências de excitação  $\omega$  são mostrados na FIGURA 8.19. Nota-se que quando  $\omega$  é aumentado, as soluções aproximadas com o MEFG tornam-se progressivamente mais precisas do que aquelas obtidas com o MEFH. Aumentar a frequência de excitação geralmente resulta na participação dos modos mais altos de vibração. Como o MEFG é capaz de obter melhores resultados para as frequências mais altas, os resultados para a resposta no tempo são também mais precisos.

### 8.3.3 Exemplo 8: membrana sujeita a condições de contorno dependentes do tempo

O terceiro exemplo deste capítulo é aquele da membrana mostrada na FIGURA 8.20. Este problema possui as seguintes condições de contorno:

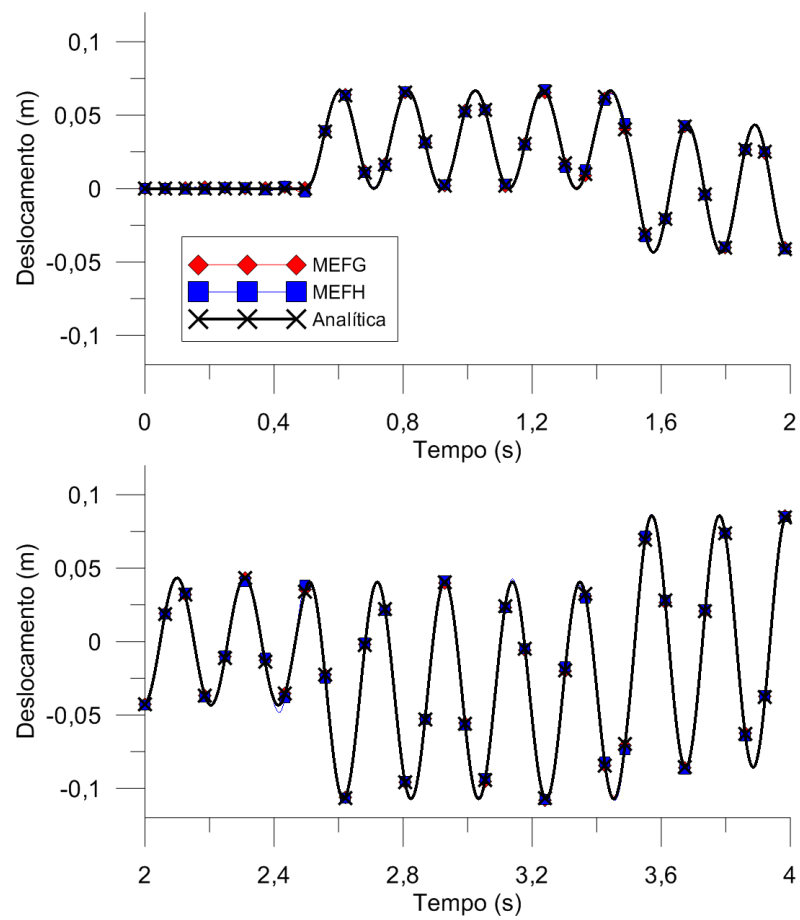


FIGURA 8.16 – EXEMPLO 7: DESLOCAMENTOS NO CENTRO DA MEMBRANA PARA  $\omega = 30\text{rad/s}$ .

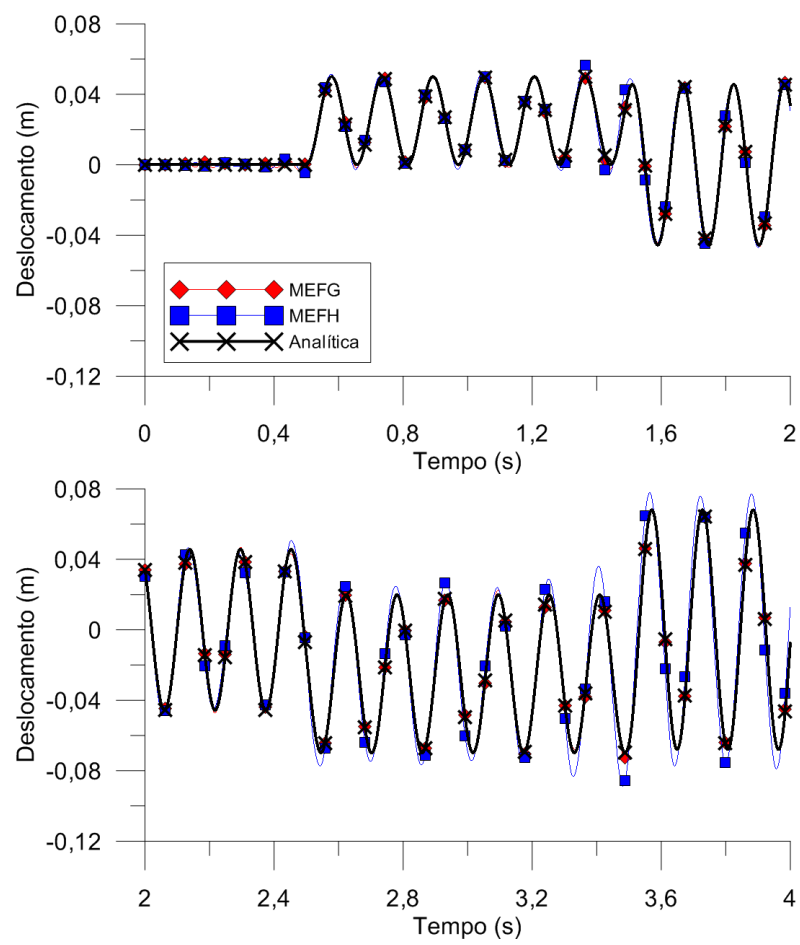


FIGURA 8.17 – EXEMPLO 7: DESLOCAMENTOS NO CENTRO DA MEMBRANA PARA  $\omega = 40\text{rad/s}$ .

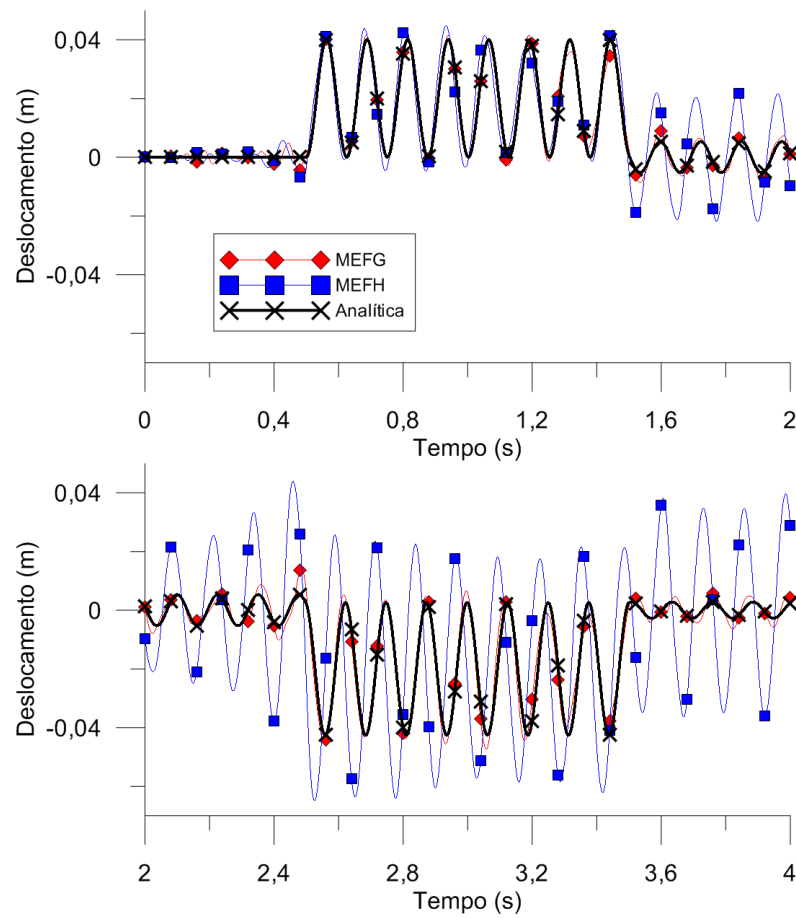


FIGURA 8.18 – EXEMPLO 7: DESLOCAMENTOS NO CENTRO DA MEMBRANA PARA  $\omega = 50\text{rad/s}$ .

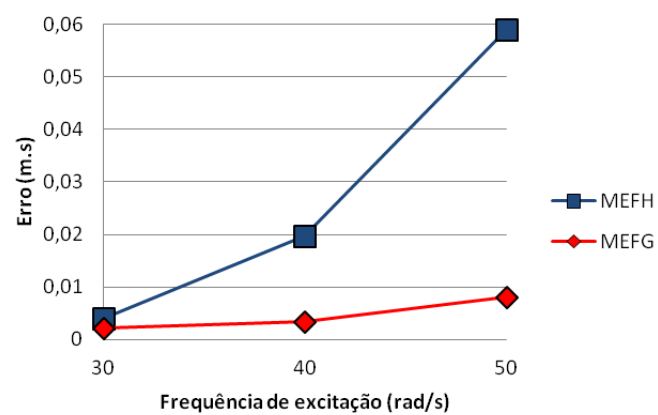


FIGURA 8.19 – EXEMPLO 7: ERROS OBTIDOS PARA A ANÁLISE DE RESPOSTA NO TEMPO COM DIFERENTES VALORES DA FREQUÊNCIA DE EXCITAÇÃO.

$$u(x = 0, y, t) = 0, \quad (8.23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x = L_x, 0 \leq y \leq L_y/2, t) = \text{sen}(\omega t), \quad (8.24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x = L_x, L_y/2 < y \leq L_y, t) = 0, \quad (8.25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y = 0, t) = 0 \quad (8.26)$$

e

$$u(x, y = L_y, t) = 0, \quad (8.27)$$

onde  $\omega$  é a frequência de excitação da condição de contorno dependente do tempo. Neste exemplo são assumidos deslocamentos e velocidades iniciais iguais a zero.

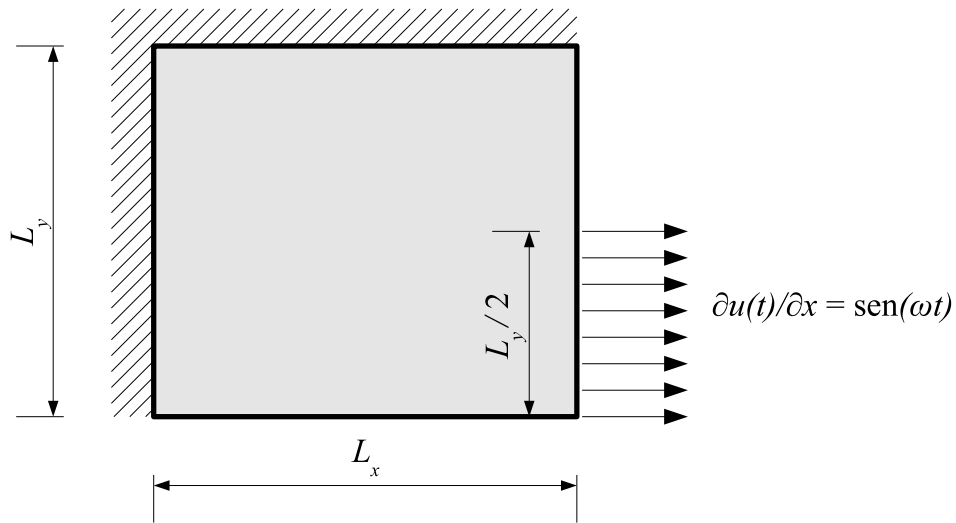


FIGURA 8.20 – EXEMPLO 8: MEMBRANA SUJEITA A CONDIÇÕES DE CONTORNO DEPENDENTES DO TEMPO.

As frequências naturais de vibração obtidas por separação de variáveis são:

$$\omega_{mn} = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{(2L_x)^2} + \frac{n^2}{(2L_y)^2}} \quad (\text{rad/s}), m, n = 1, 3, 5, \dots \quad (8.28)$$

Neste exemplo foi utilizado  $L_x = L_y = 1\text{m}$  e  $c = 1\text{m/s}$ . Além disso, as

aproximações do MEFH polinomial e do MEFG foram obtidas com  $n = 6$ , sendo que no caso do MEFG foi utilizado  $\beta_1 = 2\pi$ . Os erros relativos entre as frequências aproximadas e as frequências analíticas são mostrados na FIGURA 8.21, para uma malha de 2x2 elementos finitos. As frequências de vibração mais altas foram novamente melhor aproximadas pelo MEFG.

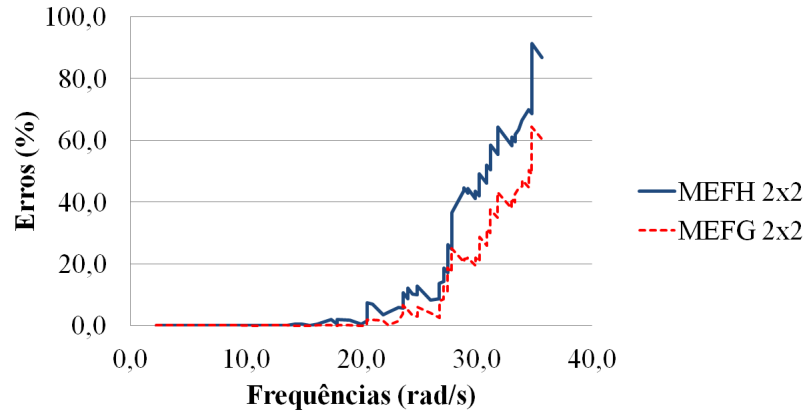


FIGURA 8.21 – EXEMPLO 8: ERROS RELATIVOS PARA AS FREQUÊNCIAS NATURAIS OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM  $\beta_1 = 2\pi$  UTILIZANDO MALHAS DADAS POR 2X2 ELEMENTOS.

Na FIGURA 8.22 são mostradas apenas as frequências de vibração com erros menores que 5%. Nota-se que o MEFG obteve erros menores que 5%, 1% e 0,5% para uma maior faixa de frequências em comparação com o MEFH. Isto indica que é possível obter melhores resultados para uma maior gama de frequências com o MEFG.

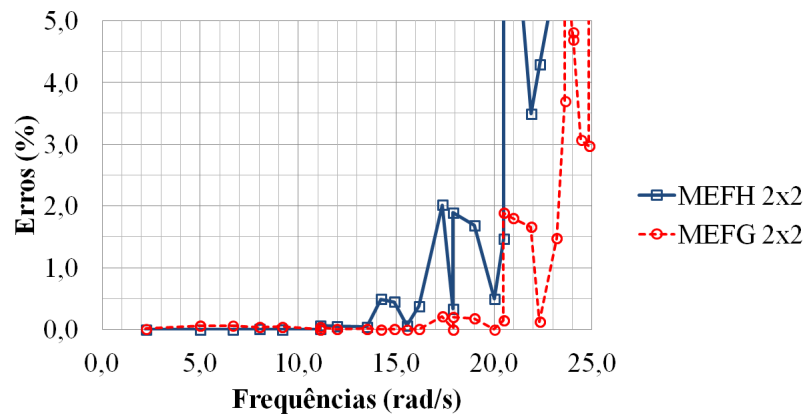


FIGURA 8.22 – EXEMPLO 8: ERROS RELATIVOS PARA AS FREQUÊNCIAS NATURAIS COM ERROS MENORES QUE 5%, OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM  $\beta_1 = 2\pi$ .

Para a análise de resposta no tempo foi utilizado o Método de Newmark com um passo de tempo  $\Delta t = 1,25 \times 10^{-3} \text{s}$ . O exemplo foi estudado para três frequências de excitação da condição de contorno:  $\omega = 10 \text{rad/s}$ ,  $\omega = 12,5 \text{rad/s}$  e  $\omega = 15 \text{rad/s}$ .

A resposta no tempo exata não é conhecida pelo autor e, portanto, a solução de referência foi obtida com o MEFH utilizando-se uma malha de 6x6 elementos finitos de quinta ordem. Os erros foram então avaliados de acordo com a solução de referência.

Os deslocamentos no centro da membrana para  $\omega = 10\text{rad/s}$ ,  $\omega = 12,5\text{rad/s}$  e  $\omega = 15\text{rad/s}$  são apresentados na FIGURA 8.23, FIGURA 8.24 e FIGURA 8.25, respectivamente. Os erros obtidos com o MEFH foram iguais a 0,0900m.s, 0,1958m.s e 0,9567m.s. Os erros obtidos com o MEFG foram iguais a 0,0437m.s, 0,0596m.s e 0,0969m.s, respectivamente.

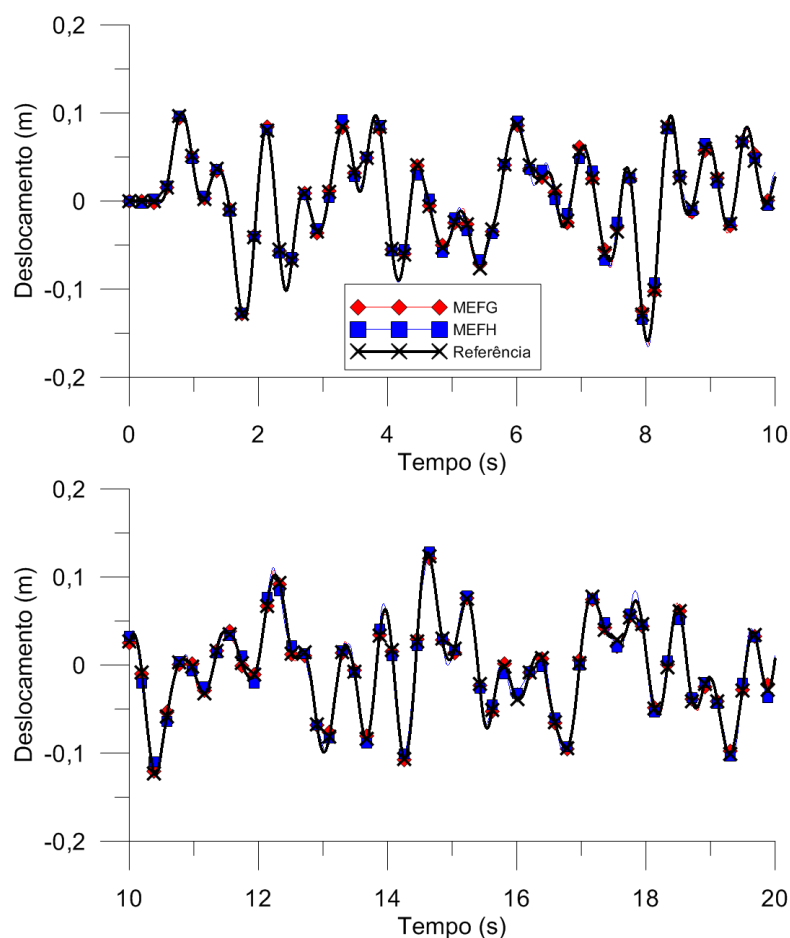


FIGURA 8.23 – EXEMPLO 8: DESLOCAMENTOS NO CENTRO DA MEMBRANA PARA  $\omega = 10\text{rad/s}$ .

Os erros obtidos com diferentes valores da frequência de excitação  $\omega$  são apresentados na FIGURA 8.26. Novamente, os resultados obtidos com o MEFG tornam-se mais precisos do que aqueles obtidos com o MEFH polinomial a medida que  $\omega$  é aumentado. Isto ocorre porque o MEFG consegue obter melhores aproximações para os modos de vibração com frequências mais elevadas.

Nota-se também que, no caso da análise com frequência de excitação  $\omega = 15\text{rad/s}$ , os resultados obtidos com o MEFG são bastante mais próximos da solução

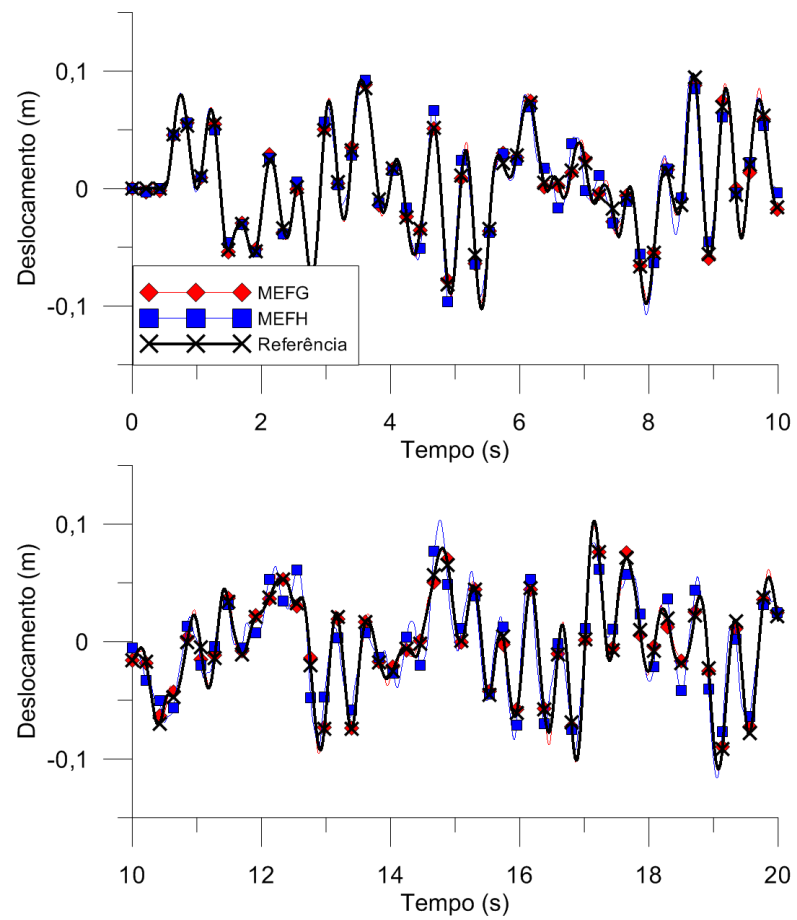


FIGURA 8.24 – EXEMPLO 8: DESLOCAMENTOS NO CENTRO DA MEMBRANA PARA  $\omega = 12,5 \text{ rad/s}$ .



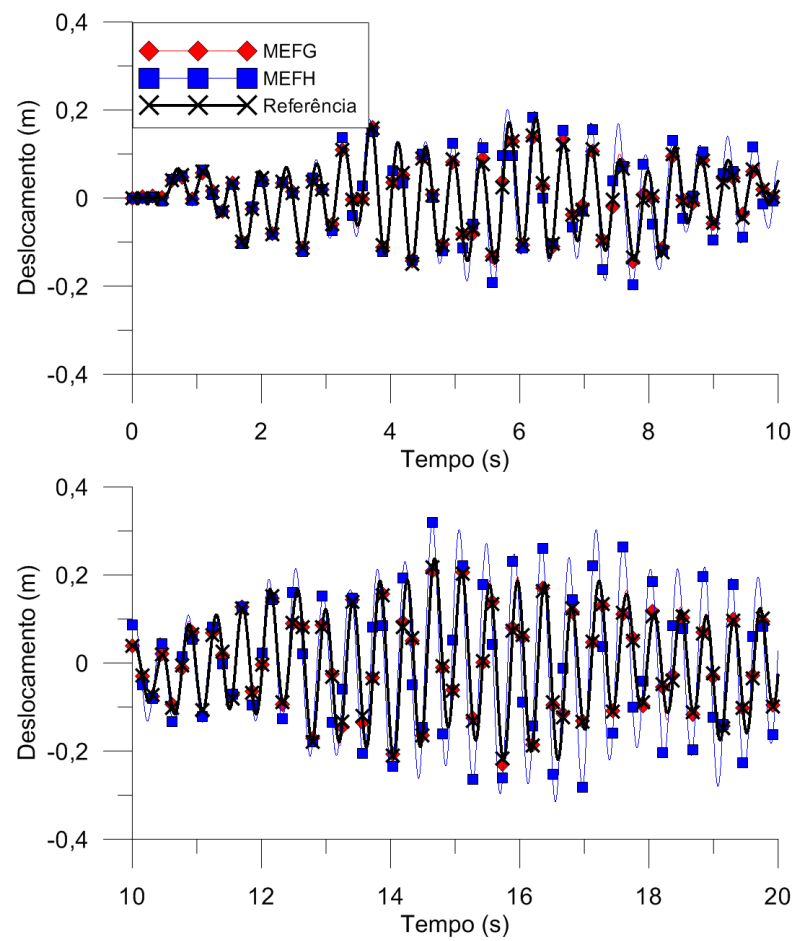


FIGURA 8.25 – EXEMPLO 8: DESLOCAMENTOS NO CENTRO DA MEMBRANA PARA  $\omega = 15\text{rad/s}$ .

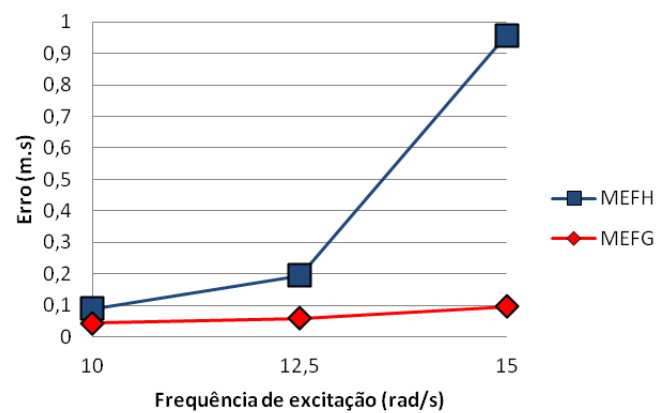


FIGURA 8.26 – EXEMPLO 8: ERROS OBTIDOS PARA A ANÁLISE DE RESPOSTA NO TEMPO COM DIFERENTES VALORES DA FREQUÊNCIA DE EXCITAÇÃO.

de referência. Como pode ser visto na FIGURA 8.22, esta excitação possui frequência na faixa onde o MEFG obteve resultados mais precisos para as frequências naturais de vibração, o que pode ter ocasionado a melhor precisão do MEFG.

#### 8.3.4 Exemplo 9: malha distorcida

O último exemplo deste capítulo é o da membrana mostrada na FIGURA 8.27. Este problema possui condições de contorno dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x = 0, y, t) = 0, \quad (8.29)$$

$$u(x, y = 0, t) = 0, \quad (8.30)$$

$$u(x, y = L_y, t) = 0 \quad (8.31)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x = L_x, y, t) = \text{sen}(\omega t), \quad (8.32)$$

onde  $\omega$  é a frequência de excitação da condição de contorno. Além disso, os deslocamentos e velocidades iniciais são nulos.

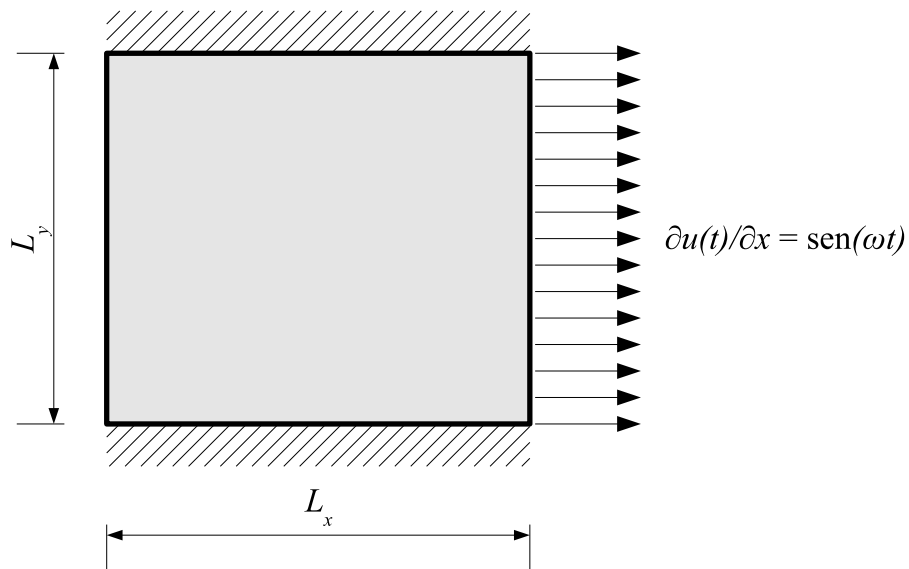


FIGURA 8.27 – EXEMPLO 9: MEMBRANA SUJEITA A CONDIÇÕES DE CONTORNO DEPENDENTES DO TEMPO.

As frequências naturais de vibração para este caso, obtidas por separação de variáveis, são:

$$\omega_{mn} = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}} \quad (\text{rad/s}), m = 1, 2, 3, \dots, n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.33)$$

Neste exemplo foi utilizado  $L_x = L_y = 1\text{m}$ ,  $c = 1\text{m/s}$ . Além disso, as aproximações do MEFH polinomial e do MEFG foram obtidas com  $n = 6$ , sendo que no caso do MEFG foi utilizado  $\beta_1 = 2\pi$ . As soluções aproximadas foram obtidas com malhas dadas por 2x2 elementos finitos.

O problema foi também resolvido com malhas distorcidas. As malhas distorcidas foram obtidas construindo-se uma malha uniforme e depois deslocando-se o nó central da malha para uma nova posição. Três casos foram estudados: a) malha uniforme com nó central com coordenadas  $(x; y) = (0,5; 0,5)\text{m}$ , b) nó central com coordenadas  $(x; y) = (0,5625; 0,5625)\text{m}$  e c) nó central com coordenadas  $(x; y) = (0,625; 0,625)\text{m}$ . Estas malhas são mostradas na FIGURA 8.28.

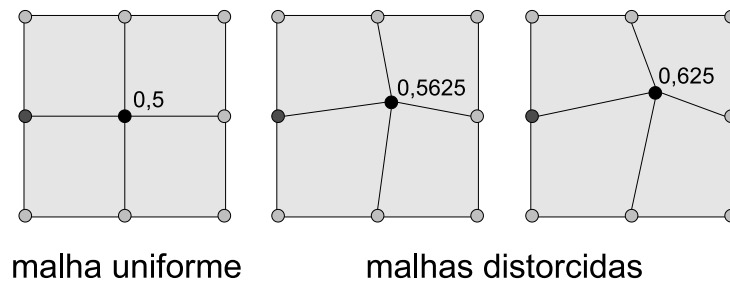


FIGURA 8.28 – EXEMPLO 9: MALHAS UTILIZADAS PARA AS ANÁLISES.  
O NÚMERO INDICA AS COORDENADAS  $x$  E  $y$  DO NÓ CENTRAL.

Neste exemplo as matrizes de massa e de rigidez foram obtidas utilizando-se técnicas de integração numérica por causa das malhas distorcidas. Para ambos os métodos, o MEFH e o MEFG, foi utilizada integração numérica por subintervalos (BATHE, 1996; HUGHES, 1987; QUARTERONI et al., 2007).

A integração em uma dimensão foi feita subdividindo-se o intervalo de integração em dez subintervalos e em cada subintervalo a integral foi aproximada com o Método de Gauss com três pontos (BATHE, 1996; HUGHES, 1987; QUARTERONI et al., 2007). A regra de integração em duas dimensões pode ser obtida da generalização da regra definida para uma dimensão (BATHE, 1996; HUGHES, 1987; QUARTERONI et al., 2007). Foi observado que os resultados não se alteraram quando o número de pontos por subintervalo era aumentado ou quando o número de subintervalos era aumentado, indicando que os erros decorrentes de integração numérica neste caso são desprezíveis.

Os erros para as frequências naturais de vibração são apresentados na FIGURA 8.29, onde o número após o nome da formulação indica a coordenada do nó central da malha. Nota-se que os erros são maiores para as malhas mais distorcidas. Porém, os erros obtidos para as frequências mais altas com o MEFG são sempre menores do que aqueles obtidos com o MEFH polinomial para uma mesma malha.

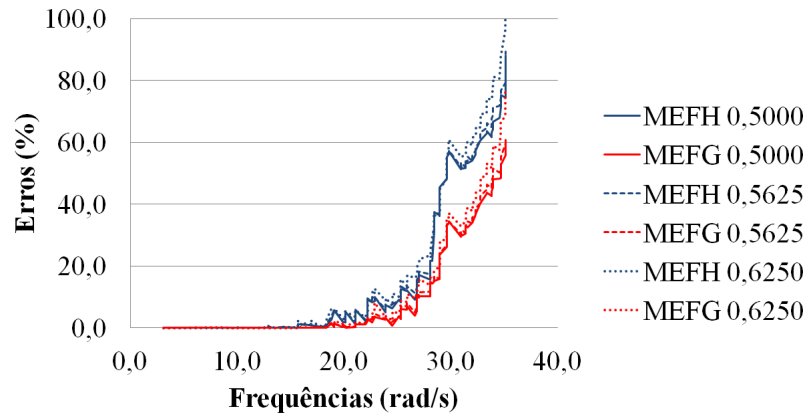


FIGURA 8.29 – EXEMPLO 9: ERROS RELATIVOS PARA AS FREQUÊNCIAS NATURAIS OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM  $\beta_1 = 2\pi$ , UTILIZANDO MALHAS DADAS POR 2X2 ELEMENTOS.

O NÚMERO APÓS O NOME DA FORMULAÇÃO INDICA A COORDENADA DO NÓ CENTRAL DA MALHA.

Os erros obtidos para as frequências de vibração mais baixas são apresentados na FIGURA 8.30. Os erros obtidos com a malha distorcida com nó central posicionado em  $(x; y) = (0, 5625; 0, 5625)$ m não são mostrados porque situam-se entre aqueles obtidos com as duas outras malhas, tanto para o MEFH quanto para o MEFG. Neste caso, nota-se que MEFH polinomial obteve melhores resultados até aproximadamente 10rad/s. Deste ponto em diante o MEFG obteve resultados mais precisos. Além disso, até mesmo o MEFG com malha distorcida obteve melhores resultados do que o MEFH polinomial com malha uniforme para frequências além de 15rad/s.

Os erros obtidos com o MEFG para frequências até 20rad/s são menores que aproximadamente 2,5%, enquanto os erros obtidos com o MEFH para estas frequências alcançam aproximadamente 6,5%. Além disso, o MEFG obteve mais frequências com erros abaixo de 1% do que o MEFH polinomial.

A resposta no tempo foi estudada primeiramente para uma frequência de excitação  $\omega = 9$ rad/s, utilizando as três malhas mostradas na FIGURA 8.28. Foi utilizado o Método de Newmark com  $\Delta t = 1,25 \times 10^{-3}$ s. A solução analítica deste problema não é conhecida pelo autor e, portanto, a solução de referência foi obtida com o MEFH polinomial com uma malha uniforme dada por 4x4 elementos finitos de quinta ordem. Os erros foram então calculados de acordo com a solução de referência, utilizando-se a equação (5.7).

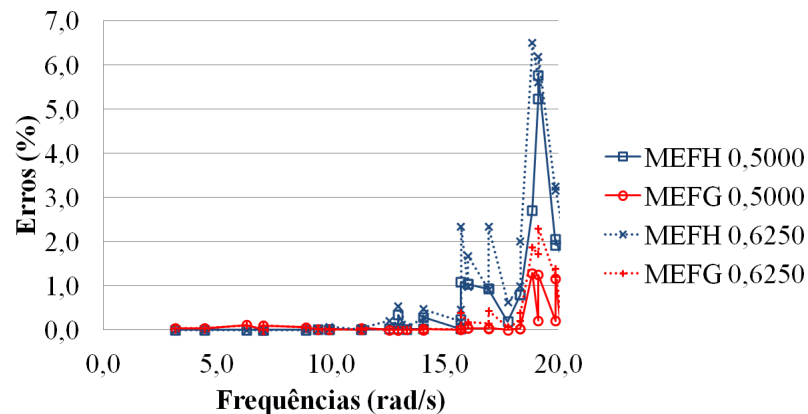


FIGURA 8.30 – EXEMPLO 9: ERROS RELATIVOS PARA AS FREQUÊNCIAS NATURAIS MAIS BAIXAS, OBTIDAS COM O MEFH E O MEFH COM  $\beta_1 = 2\pi$  E MALHAS 2X2. O NÚMERO APÓS O NOME DA FORMULAÇÃO INDICA A COORDENADA DO NÓ CENTRAL DA MALHA.

Os deslocamentos no meio da borda esquerda da membrana,  $(x; y) = (0; 0,5)\text{m}$ , obtidos com a malha mais distorcida com nó central posicionado em  $(x; y) = (0,625; 0,625)\text{m}$ , são apresentados na FIGURA 8.31. Os deslocamentos obtidos com as outras duas malhas não são mostrados.

Os erros obtidos para a resposta no tempo com as três malhas são apresentados na TABELA 8.5. Nota-se que os erros aumentam para as malhas mais distorcidas. Porém, para as três malhas, os erros obtidos com o MEFH são menores do que aqueles obtidos com o MEFH polinomial.

TABELA 8.5 – EXEMPLO 9: ERROS (m.s) CALCULADOS PARA A RESPOSTA NO TEMPO UTILIZANDO O MEFH E O MEFH COM  $\beta_1 = 2\pi$  EM FUNÇÃO DA POSIÇÃO DO NÓ CENTRAL.

COORDENADAS	(0,5;0,5)m	(0,5625;0,5625)m	(0,625;0,625)m
MEFG	0,0846	0,2086	0,3854
MEFH	0,2119	0,2960	0,4621

A análise também foi feita para uma excitação de frequência  $\omega = 15\text{rad/s}$ . Os deslocamentos no meio da borda esquerda, obtidos com a malha uniforme, são mostrados na FIGURA 8.32. Os deslocamentos obtidos com a malha distorcida com nó central posicionado em  $(x; y) = (0,625; 0,625)\text{m}$  são mostrados na FIGURA 8.33. Neste caso pode-se notar que os resultados obtidos com o MEFH polinomial são pouco precisos em relação à solução de referência. Os resultados obtidos com o MEFH, por outro lado, são bastante precisos mesmo para o caso da malha distorcida. Neste caso não foram calculados os erros de acordo com a equação (5.7) porque a diferença dos resultados pode ser verificada por inspeção visual.

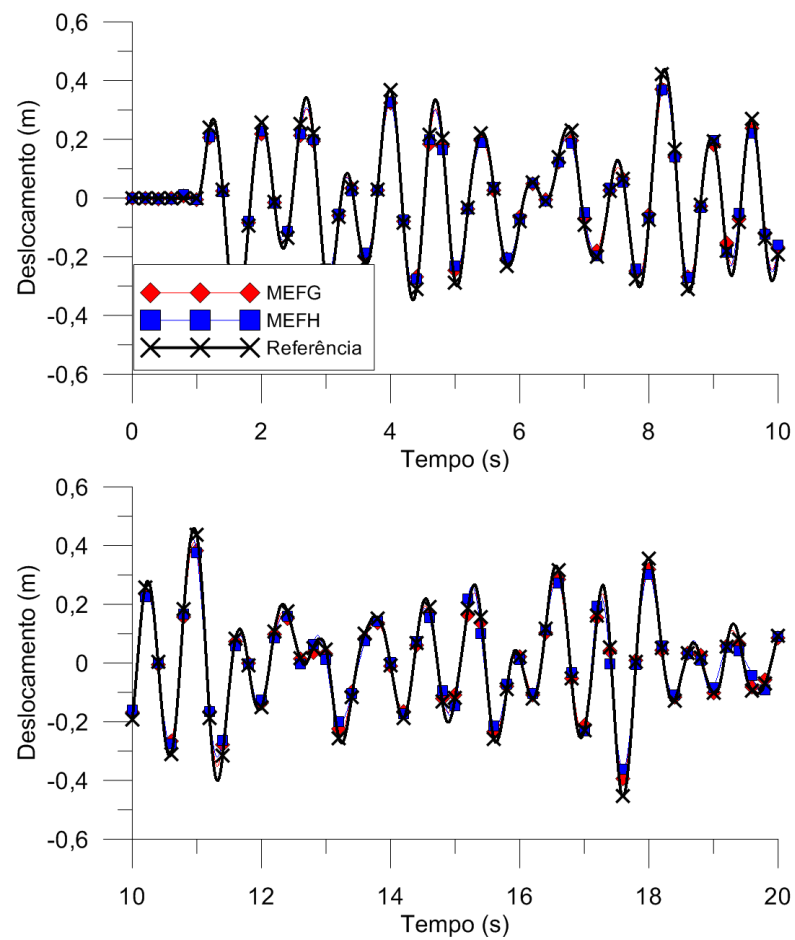


FIGURA 8.31 – EXEMPLO 9: DESLOCAMENTOS NO MEIO DA BORDA ESQUERDA DA MEMBRANA PARA  $\omega = 9\text{rad/s}$ , OBTIDOS COM A MALHA DISTORCIDA COM NÓ CENTRAL POSICIONADO EM  $(x; y) = (0,625; 0,625)\text{m}$ .

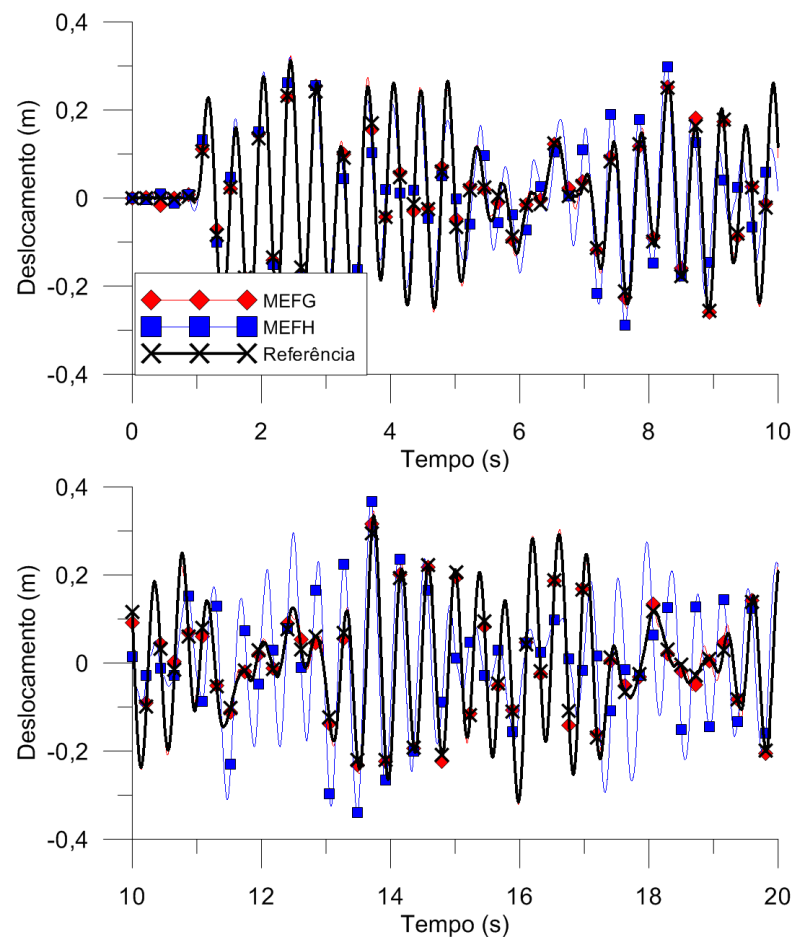


FIGURA 8.32 – EXEMPLO 9: DESLOCAMENTOS NO MEIO DA BORDA ESQUERDA PARA  $\omega = 15\text{rad/s}$  OBTIDOS COM A MALHA UNIFORME.

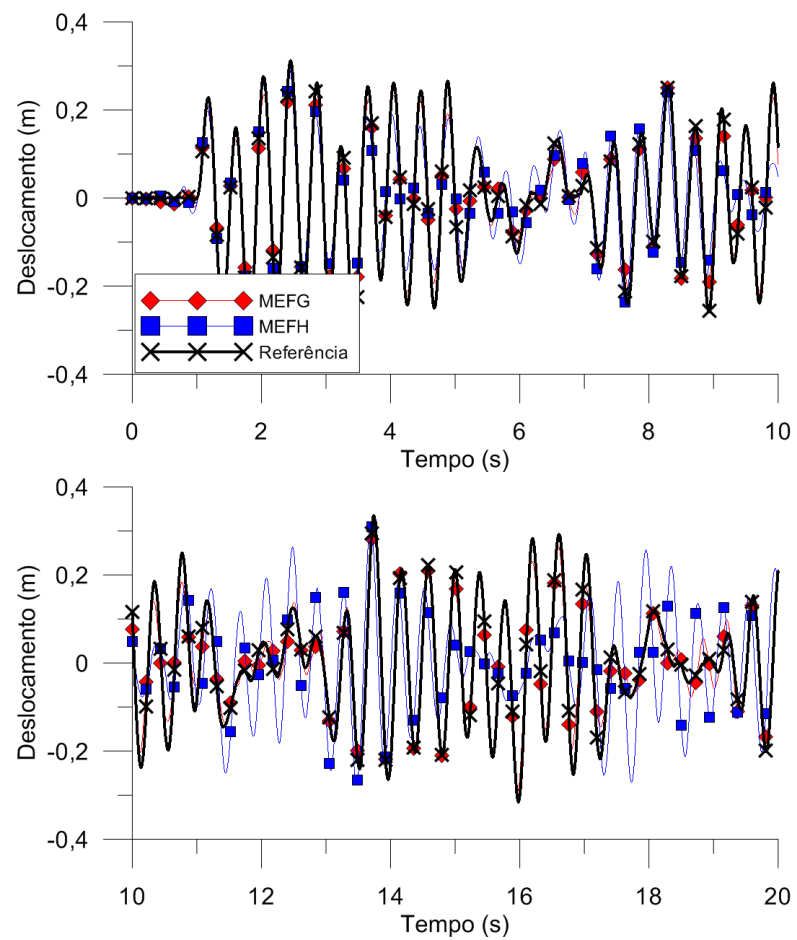


FIGURA 8.33 – EXEMPLO 9: DESLOCAMENTOS NO MEIO DA BORDA ESQUERDA PARA  $\omega = 15\text{rad/s}$ , OBTIDOS COM A MALHA DISTORCIDA COM NÓ CENTRAL POSICIONADO EM  $(x; y) = (0,625; 0,625)\text{m}$ .



## 9 ESTADO PLANO DE TENSÕES

Neste capítulo é apresentado o MEFG para o estado plano de tensões. O sistema de equações do problema dinâmico pode ser obtido através do Princípio dos Trabalhos Virtuais, como demonstrado por Bathe (1996), Hughes (1987) e Zienkiewicz e Taylor (2000).

O sistema de equações deste problema é o mesmo da equação (6.45), porém agora as matrizes de um dado elemento são dadas por:

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega_e \quad (9.1)$$

e

$$\mathbf{M}^e = \int_{\Omega_e} \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} d\Omega_e, \quad (9.2)$$

onde  $\Omega_e$  é o domínio do elemento finito,  $\mathbf{H}$  é a matriz com as funções de aproximação do elemento,  $\mathbf{B}$  é a matriz com as derivadas das funções de aproximação e  $\mathbf{C}$  é a matriz constitutiva do problema. As matrizes  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  para o caso do estado plano de tensões são apresentadas por Bathe (1996), Hughes (1987) e Zienkiewicz e Taylor (2000).

O problema do estado plano de tensões é regido por uma equação diferencial parcial de segunda ordem, assim como ocorre para o problema da equação da onda e para o caso das barras sujeitas apenas a deslocamentos axiais. Por este motivo, as funções de aproximação utilizadas neste caso são as mesmas utilizadas para o problema da equação da onda em duas dimensões, apresentadas no capítulo anterior e obtidas do processo de multiplicação das funções unidimensionais. A única diferença é que existirão graus de liberdade relacionados a deslocamentos em duas direções ortogonais, dados por um vetor deslocamento da forma

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}. \quad (9.3)$$

Uma vez que as funções de aproximação tenham sido definidas, as matrizes de rigidez e de massa podem ser obtidas da equação (9.1) e da equação (9.2). A implementação computacional do método é muito semelhante ao caso da equação da onda bidimensional, a não ser pelo fato de que serão aproximados os deslocamentos em duas direções  $x$  e  $y$  e, portanto, os elementos possuirão o dobro do número de graus de

liberdade. Os aspectos de implementação discutidos para o caso da equação da onda são também válidos para este problema, incluindo as semelhanças entre o MEFH e o MEF.

Os elementos finitos utilizados neste capítulo são quadriláteros. No contexto do MEF, quadriláteros de geometria arbitrária podem ser mapeados para um elemento de referência quadrado como aquele mostrado na FIGURA 9.1 (HUGHES, 1987; BECKER et al., 1981; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000; BATHE, 1996).

Neste trabalho a geometria dos elementos é aproximada por polinômios de Lagrange de segunda ordem. Esta aproximação é fixa, independente da ordem da aproximação utilizada para os deslocamentos, e é utilizada apenas para a geometria dos elementos. Consequentemente, os elementos finitos utilizados aqui não são isoparamétricos, uma vez que a ordem da aproximação utilizada para os deslocamentos é, em geral, diferente da ordem da aproximação utilizada para a geometria.

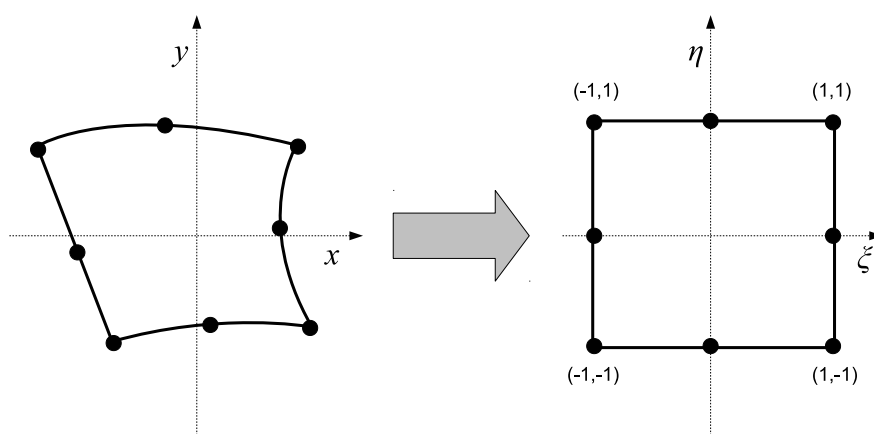


FIGURA 9.1 – MAPEAMENTO DE UM ELEMENTO FINITO COM GEOMETRIA ARBITRÁRIA (APROXIMADA POR UM POLINÔMIO DE SEGUNDA ORDEM) PARA UM ELEMENTO DE REFERÊNCIA COM COORDENADAS LOCAIS  $\xi = [-1, 1]$  E  $\eta = [-1, 1]$ .

A integração das matrizes de rigidez e de massa é feita utilizando-se técnicas de integração numérica. Foi utilizada a Quadratura Gaussiana por subintervalos (BATHE, 1996; HUGHES, 1987; QUARTERONI et al., 2007). Neste caso, a integração em uma dimensão foi feita subdividindo o intervalo em dez subintervalos e efetuando-se a Quadratura Gaussiana em cada subintervalo com três pontos. A regra de integração em duas dimensões pode ser obtida da generalização da regra unidimensional. Foi observado que os resultados não se alteraram quando o número de pontos de integração ou o número de subintervalos foi aumentado ou reduzido, indicando que a integração numérica utilizada aqui apresenta precisão suficiente.

As rotinas computacionais foram implementadas no programa MATLAB (MATHWORKS, 2011). Em comparação com as rotinas utilizadas para a equação da onda

bidimensional, a principal diferença é a necessidade de realizar os produtos matriciais necessários para se avaliar as matrizes de rigidez e de massa, como pode ser visto na equação (9.1) e na equação (9.2).

## 9.1 RESULTADOS

### 9.1.1 Exemplo 10: chapa quadrada com malha distorcida

O primeiro exemplo estudado neste capítulo é a chapa quadrada mostrada na FIGURA 9.2. As propriedades do material são: módulo de elasticidade  $E = 210\text{GPa}$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  e massa específica  $\rho = 8000\text{kg/m}^3$ . A chapa possui espessura  $t = 0,05\text{m}$  e  $L_x = L_y = 1\text{m}$ . Os deslocamentos verticais e horizontais da borda esquerda estão restritos. Neste exemplo são estudados apenas os resultados relativos às frequências naturais de vibração.

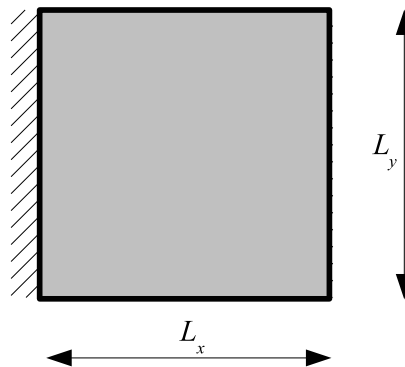


FIGURA 9.2 – EXEMPLO 10: CHAPA QUADRADA.

As frequências de vibração de referência foram obtidas com o MEFH polinomial com uma malha dada por  $4 \times 4$  elementos finitos de ordem 9. As frequências naturais de vibração foram também obtidas com o MEFH e o MEFG com uma malha dada por  $2 \times 2$  elementos finitos, utilizando-se  $n = 6$  na equação (8.8). No caso do MEFH polinomial isto corresponde a utilizar elementos de quinta ordem. No caso do MEFG foram realizados testes com  $\beta_1$  igual a  $\pi$ ,  $3\pi/2$ ,  $2\pi$ ,  $5\pi/2$  e  $3\pi$ .

As soluções aproximadas foram obtidas com as malhas apresentadas na FIGURA 9.3. A malha uniforme foi construída colocando-se o nó central no centro da chapa. As malhas distorcidas foram obtidas deslocando-se o nó central para as posições mostradas. Note que no caso da malha severamente distorcida um dos elementos finitos se torna um triângulo. Todos os elementos neste caso possuem lados retos.

Os erros relativos, calculados de acordo com a equação (6.90), das primeiras 200

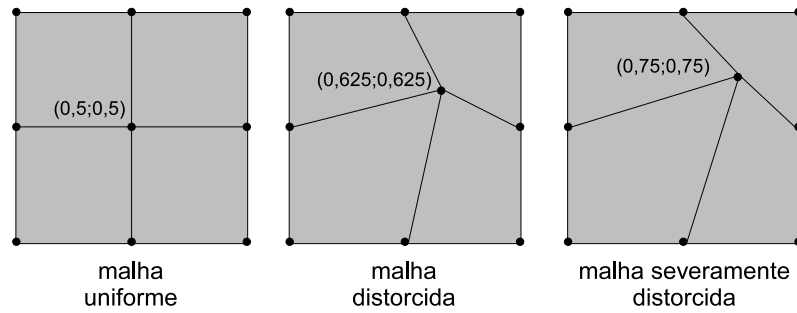


FIGURA 9.3 – EXEMPLO 10: MALHAS UTILIZADAS PARA O PROBLEMA DA CHAPA QUADRADA.

freqüências de vibração obtidas com a malha uniforme são mostradas na FIGURA 9.4. Os erros relativos para as primeiras 20 freqüências são mostradas na TABELA 9.1, exceto para o MEFG com  $\beta_1 = 3\pi$ , pois os erros obtidos neste caso foram muito maiores do que os erros obtidos nos demais casos.

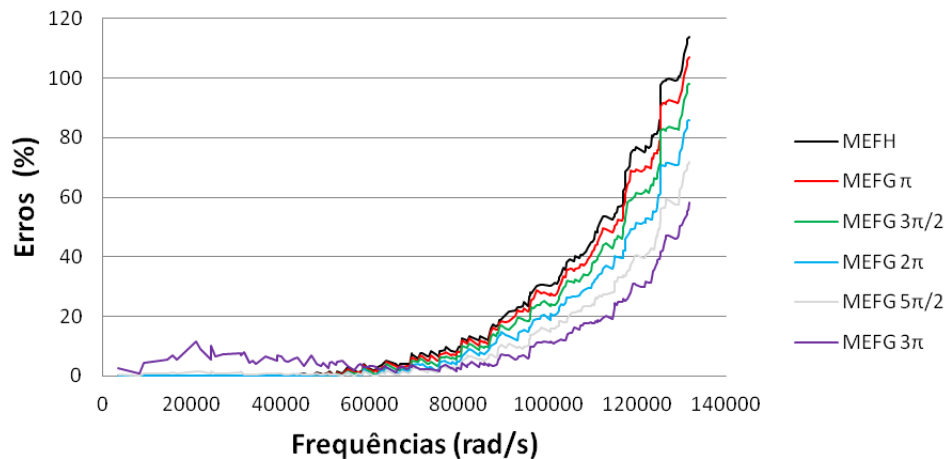


FIGURA 9.4 – EXEMPLO 10: ERROS RELATIVOS DAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM DIFERENTES VALORES DE  $\beta_1$  E MALHAS UNIFORMES.

Da FIGURA 9.4 pode-se notar que as freqüências mais altas foram melhor aproximadas pelo MEFG. Para o MEFG com  $\beta_1 = 3\pi$ , os resultados obtidos para as freqüências mais baixas foram pouco precisos. Porém, para os outros valores de  $\beta_1$ , as freqüências mais altas foram melhor aproximadas do que com o MEFH polinomial, sem comprometer demais a precisão das freqüências mais baixas.

Da TABELA 9.1 nota-se que as primeiras 11 freqüências de vibração foram melhor aproximadas pelo MEFH polinomial. Porém, os erros obtidos com o MEFG com  $\beta_1$  igual a  $\pi$  e  $3\pi/2$  são muito semelhantes àqueles obtidos com o MEFH. Além disso, os resultados obtidos com o MEFG tornam-se mais precisos para as freqüências de vibração mais altas. Para o MEFG com  $\beta_1 = \pi$  e  $\beta_1 = 3\pi/2$ , os resultados tornam-se mais precisos do que

TABELA 9.1 – EXEMPLO 10: ERROS RELATIVOS (%) DAS 20 PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM DIFERENTES VALORES DE  $\beta_1$  E MALHAS UNIFORMES.

MODO	FREQ.(rad/s)	MEFH	MEFG $\pi$	MEFG $3\pi/2$	MEFG $2\pi$	MEFG $5\pi/2$
1	3372,13	0,057055	0,063529	0,077292	0,140878	0,525534
2	8092,72	0,018804	0,020749	0,024739	0,046244	0,193968
3	9079,09	0,010432	0,013191	0,023297	0,106895	0,758858
4	14427,23	0,002301	0,002959	0,009731	0,104196	0,943812
5	15558,23	0,030022	0,034655	0,047197	0,154503	1,129426
6	16511,96	0,000493	0,000658	0,006113	0,091532	0,864082
7	20812,77	0,015192	0,017391	0,030545	0,154964	1,577776
8	21911,61	0,036135	0,042266	0,062384	0,204607	1,511429
9	24194,74	0,012133	0,013001	0,024816	0,090953	0,666843
10	24349,42	0,014774	0,014303	0,022905	0,148156	1,502526
11	25319,90	0,011125	0,011875	0,015744	0,083171	0,810767
12	26790,31	0,038921	0,034790	0,051346	0,120366	0,793772
13	30891,78	0,058661	0,040537	0,051479	0,142313	1,008063
14	31068,55	0,089772	0,050397	0,072136	0,222300	1,434203
15	31740,80	0,051334	0,036241	0,047011	0,116429	0,624431
16	32970,53	0,049527	0,030049	0,036529	0,097786	0,593355
17	33517,49	0,023377	0,008956	0,007196	0,030918	0,505638
18	34374,53	0,013482	0,008268	0,009994	0,031191	0,340470
19	36566,79	0,237711	0,128078	0,106722	0,241922	0,942447
20	39182,66	0,045343	0,027088	0,025678	0,066201	0,898317

aqueles obtidos com o MEFH a partir da décima segunda e da décima terceira frequências de vibração, respectivamente.

Uma inspeção mais detalhada da situação das frequências mais baixas é apresentada na FIGURA 9.5. Neste caso, apenas os resultados obtidos com o MEFH polinomial e o MEFG com  $\beta_1 = 2\pi$  são apresentados. Os resultados obtidos com o MEFH são mais precisos até aproximadamente 40000rad/s. Deste ponto em diante as frequências obtidas com o MEFG são mais precisas. Porém, na faixa de frequências onde o MEFH obteve resultados mais precisos, os erros obtidos com o MEFG são sempre menores do que 0,5%, o que é uma precisão suficiente para a maior parte das aplicações práticas.

Da FIGURA 9.5 pode-se notar também que o MEFG obteve erros menores que 5% até aproximadamente 80000rad/s, enquanto o MEFH obteve a mesma precisão apenas até 70000rad/s. Isto indica que o MEFH é capaz de obter resultados mais precisos para as frequências de vibração mais baixas, mas que o MEFG é capaz de obter melhores resultados para uma maior faixa de frequências. Estas foram as mesmas tendências observadas em todos os problemas estudados anteriormente.

Os erros obtidos com as malhas distorcidas são mostrados na FIGURA 9.6 e aqueles obtidos com as malhas severamente distorcidas são mostrados na FIGURA 9.7.

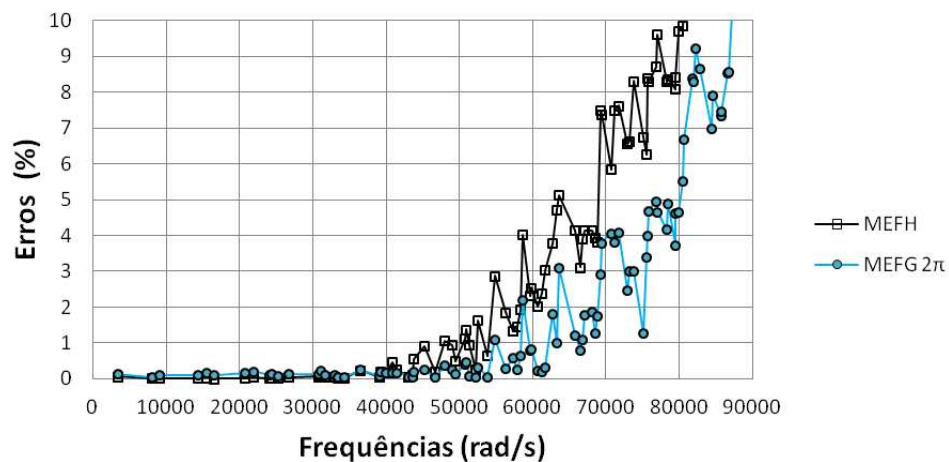


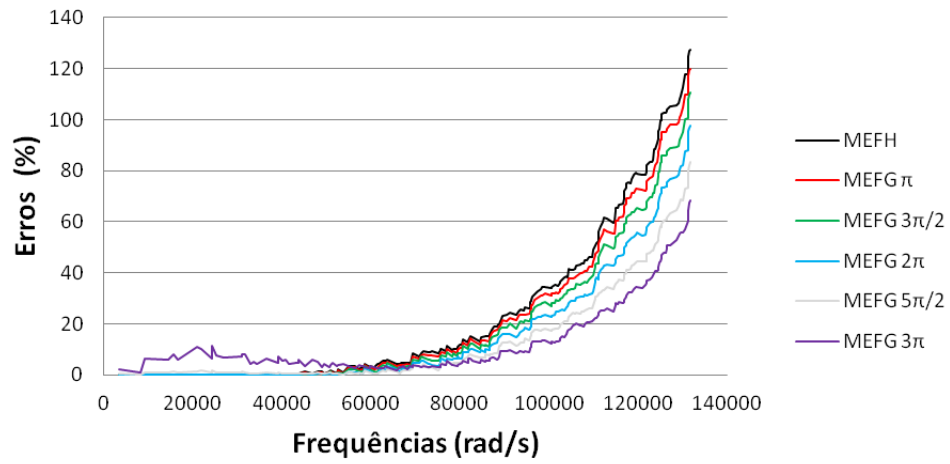
FIGURA 9.5 – EXEMPLO 10: ERROS RELATIVOS DAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO MAIS BAIXAS OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM  $\beta_1 = 2\pi$  E MALHAS UNIFORMES.

Os resultados indicam que os erros aumentam à medida que as malhas são mais distorcidas. Porém, em todos os casos as tendências observadas anteriormente ainda valem. O MEFH é capaz de obter resultados mais precisos para as frequências mais baixas, mas o MEFG é capaz de obter melhores resultados para uma maior faixa de frequências. Além disso, os erros do MEFG para a faixa de frequências que é melhor aproximada pelo MEFH são pequenos o suficiente para a maior parte das aplicações práticas.

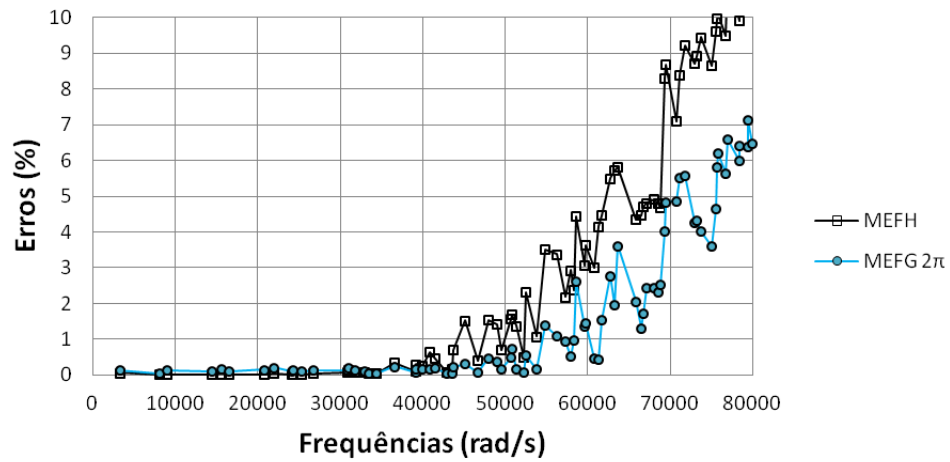
O mesmo problema foi também resolvido com o MEFH e o MEFG com  $\beta_1 = 2\pi$  com uma malha dada por  $4 \times 4$  elementos e  $n = 6$ . Uma comparação dos resultados com aqueles obtidos com a malha dada por  $2 \times 2$  elementos é mostrada na FIGURA 9.8, e na TABELA 9.2.

O MEFH polinomial obteve melhores resultados para as frequências mais baixas novamente. Porém, o MEFG obteve melhores resultados para uma maior faixa de frequências, incluindo as frequências mais altas. Note que, o erro máximo observado para o MEFG- $4 \times 4$  na FIGURA 9.8b foi de aproximadamente 1,5%. No caso do MEFH- $4 \times 4$ , o erro máximo observado para a mesma faixa de frequências foi de aproximadamente 4,5%. Isto indica que o MEFG é capaz de obter melhores resultados para uma maior gama de frequências.

Por fim, a décima sétima e a décima oitava frequências foram melhor aproximadas com o MEFG com malha  $2 \times 2$  do que com malha  $4 \times 4$ , como pode ser visto na TABELA 9.2. Isto indica que o refino do tipo  $h$  no caso do MEFG proposto aqui não garante a convergência monotônica das frequências naturais do problema, como discutido na Seção 6.5.2.

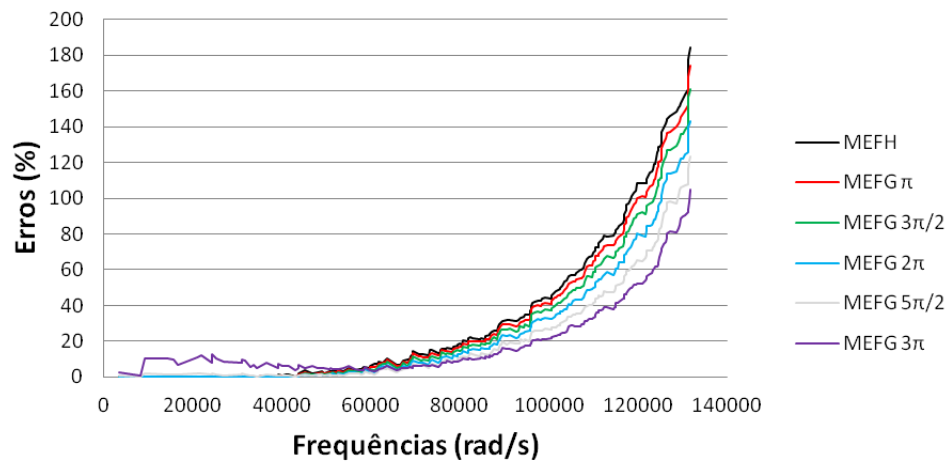


a)

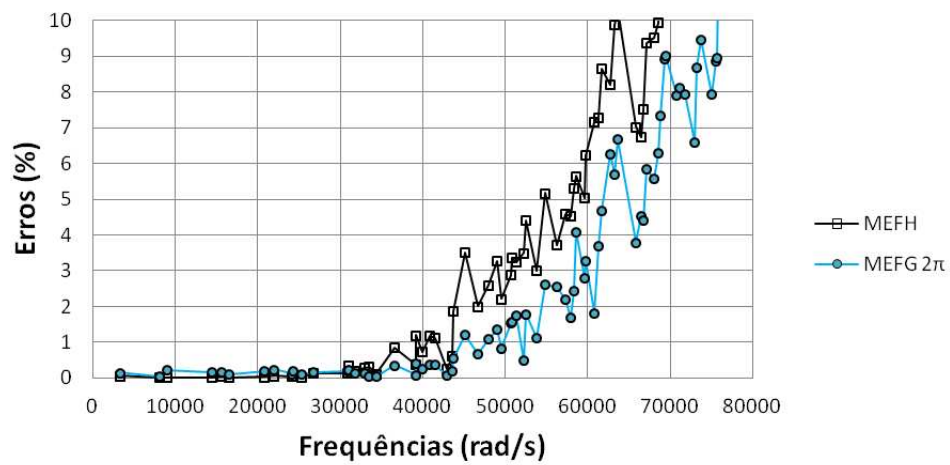


b)

FIGURA 9.6 – EXEMPLO 10: ERROS RELATIVOS DAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM MEFH E O MEFG COM DIFERENTES VALORES DE  $\beta_1$  E MALHAS DISTORCIDAS, PARA DIFERENTES FAIXAS DE FREQUÊNCIA.



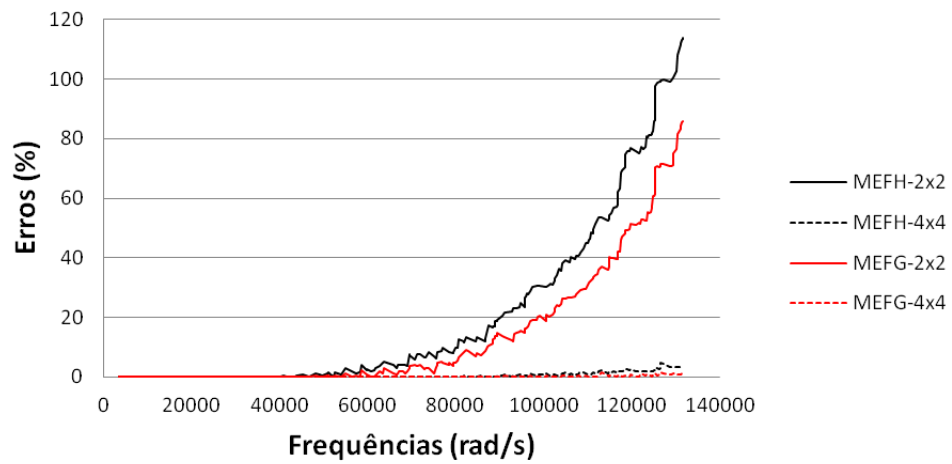
a)



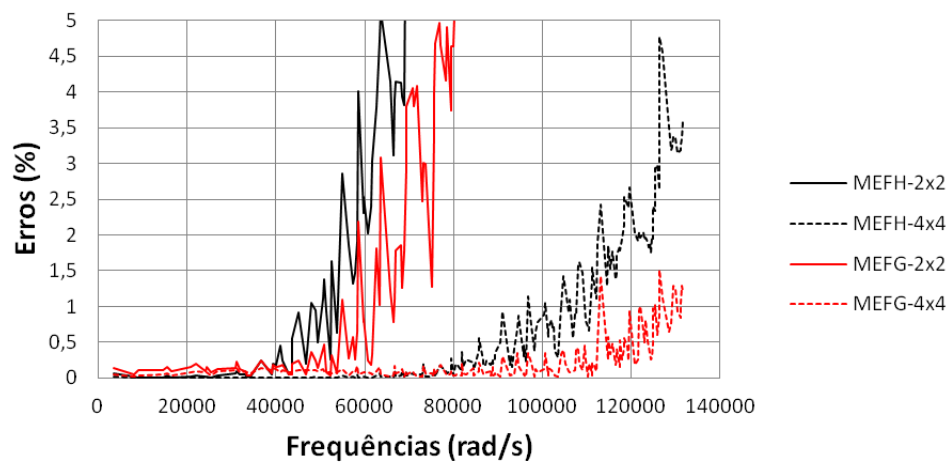
b)

FIGURA 9.7 – EXEMPLO 10: ERROS RELATIVOS DAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM DIFERENTES VALORES DE  $\beta_1$  E MALHAS SEVERAMENTE DISTORCIDAS, PARA DIFERENTES FAIXAS DE FREQUÊNCIAS.





a)



b)

FIGURA 9.8 – EXEMPLO 10: ERROS RELATIVOS DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM  $\beta_1 = 2\pi$  E MALHAS UNIFORMES DADAS POR 2X2 E 4X4 ELEMENTOS, PARA DIFERENTES FAIXAS DE FREQUÊNCIAS.

TABELA 9.2 – EXEMPLO 10: ERROS RELATIVOS (%) DAS 20 PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM  $\beta_1 = 2\pi$  E MALHAS UNIFORMES DADAS POR 2X2 E 4X4 ELEMENTOS.

MODO	FREQ. (rad/s)	MEFH-2x2	MEFH-4x4	MEFG-2x2	MEFG-4x4
1	3372,13	0,057055	0,017104	0,140878	0,045679
2	8092,72	0,018804	0,005698	0,046244	0,014898
3	9079,09	0,010432	0,002064	0,106895	0,035344
4	14427,23	0,002301	0,000433	0,104196	0,043407
5	15558,23	0,030022	0,008301	0,154503	0,060054
6	16511,96	0,000493	0,000144	0,091532	0,032557
7	20812,77	0,015192	0,001996	0,154964	0,085708
8	21911,61	0,036135	0,008914	0,204607	0,089157
9	24194,74	0,012133	0,001115	0,090953	0,074122
10	24349,42	0,014774	0,003700	0,148156	0,085970
11	25319,90	0,011125	0,003330	0,083171	0,039035
12	26790,31	0,038921	0,005417	0,120366	0,091312
13	30891,78	0,058661	0,005887	0,142313	0,113526
14	31068,55	0,089772	0,004379	0,222300	0,131812
15	31740,80	0,051334	0,006101	0,116429	0,082732
16	32970,53	0,049527	0,001071	0,097786	0,092898
17	33517,49	0,023377	0,000565	0,030918	0,074516
18	34374,53	0,013482	0,000890	0,031191	0,065434
19	36566,79	0,237711	0,004461	0,241922	0,131592
20	39182,66	0,045343	0,005478	0,066201	0,102046

### 9.1.2 Exemplo 11: chapa com furo circular

O segundo exemplo deste capítulo é aquele da chapa mostrada na FIGURA 9.9. As propriedades do material são  $E = 210\text{GPa}$ ,  $\nu = 0,3$  e  $\rho = 8000\text{kg/m}^3$ . A chapa possui espessura igual a  $t = 0,05\text{m}$ ,  $L_x = 4\text{m}$  e  $L_y = 2\text{m}$ . O furo está posicionado no centro da chapa e possui diâmetro  $d = 1,0\text{m}$ . Os deslocamentos verticais e horizontais nas bordas esquerda e direita são restritos. Neste exemplo são estudados apenas os resultados relativos às frequências naturais de vibração.

Por causa da simetria, apenas metade da chapa foi modelada. A malha de elementos finitos utilizada foi aquela mostrada na FIGURA 9.10. Todas as bordas, incluindo aquela que define o furo circular, foram divididas em elementos de mesmo tamanho. Os lados dos elementos posicionados sobre o furo foram modelados com uma aproximação parabólica. Todos os outros lados foram modelados utilizando-se retas. Além disso, a malha é simétrica em relação ao eixo horizontal que passa pelo centro do domínio.

Os triângulos indicam os deslocamentos restritos. Neste caso, os deslocamentos verticais e horizontais foram restritos no lado esquerdo da chapa. No lado direito, as condições de simetria implicam na restrição dos deslocamentos horizontais. Como

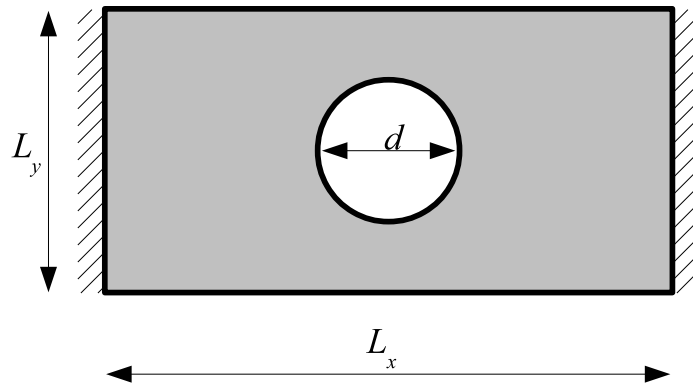


FIGURA 9.9 – EXEMPLO 11: CHAPA COM FURO CIRCULAR.

apenas metade da chapa é modelada, alguns modos de vibração da estrutura da FIGURA 9.9 não foram capturados na análise da chapa mostrada na FIGURA 9.10.

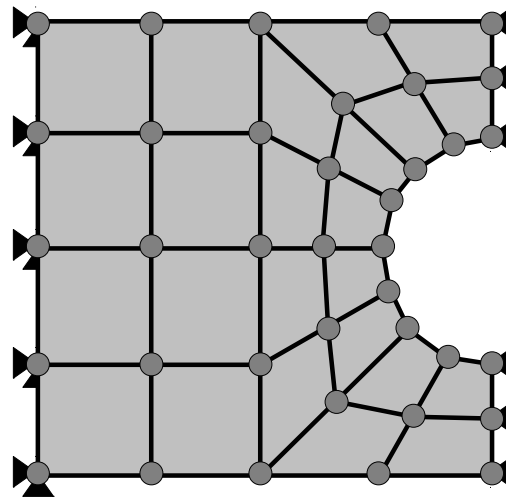
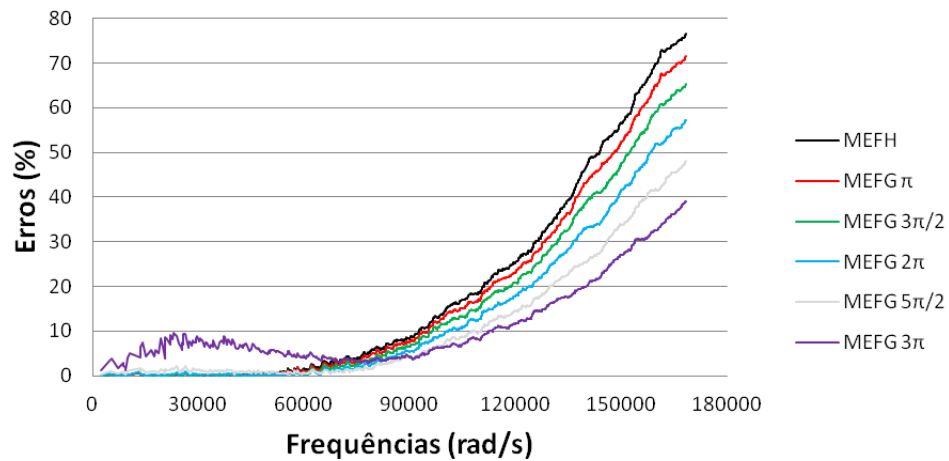


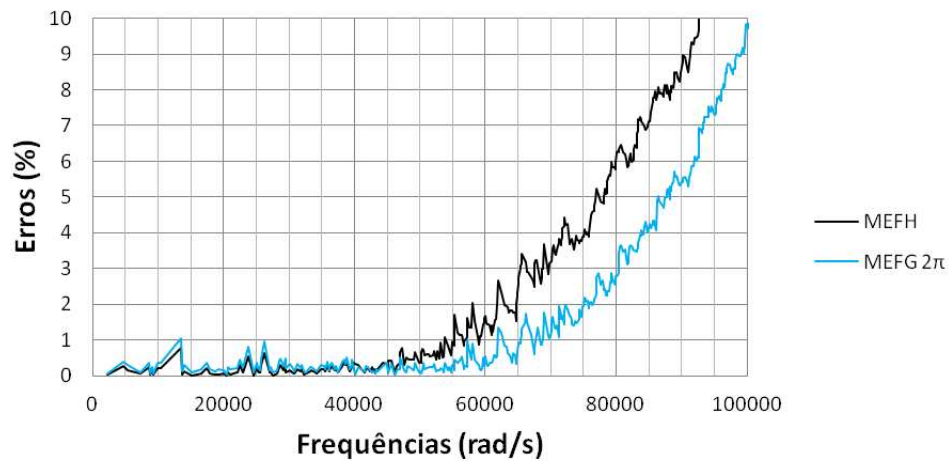
FIGURA 9.10 – EXEMPLO 11: MALHA UTILIZADA PARA MODELAR METADE DA CHAPA COM FURO CIRCULAR.

A solução de referência foi obtida com o MEFH polinomial com elementos de ordem 9, obtidos utilizando-se  $n = 10$ . Os erros relativos obtidos com o MEFG e o MEFH polinomial com  $n = 6$  para as primeiras 1000 frequências de vibração são apresentadas na FIGURA 9.11. Os erros relativos para as primeiras 10 frequências são mostradas na TABELA 9.3, exceto para o MEFG com  $\beta_1 = 3\pi$ , pois neste caso os erros foram muito superiores aos dos outros casos.

Da FIGURA 9.11 pode-se notar que os erros obtidos com o MEFG utilizando-se  $\beta_1 = 2\pi$  são menores do que 2% até aproximadamente 75000rad/s. Já os erros obtidos



a)



b)

FIGURA 9.11 – EXEMPLO 11: ERROS RELATIVOS DAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM O MEFH E O MEFHG COM DIFERENTES VALORES DE  $\beta_1$ , PARA DIFERENTES FAIXAS DE FREQUÊNCIAS.

TABELA 9.3 – EXEMPLO 11: ERROS RELATIVOS (%) PARA AS 10 PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM O MEFH E O MEFHG COM DIFERENTES VALORES DE  $\beta_1$ .

MODO	FREQ. (rad/s)	MEFH	MEFG $\pi$	MEFG $3\pi/2$	MEFG $2\pi$	MEFG $5\pi/2$
1	2185,32	0,033730	0,036631	0,042866	0,073430	0,266254
2	4677,17	0,264439	0,280962	0,308152	0,402900	0,942167
3	5275,79	0,161637	0,172574	0,193022	0,288210	0,911482
4	7240,76	0,050733	0,054213	0,061099	0,098985	0,366099
5	8586,68	0,238783	0,251466	0,273072	0,355968	0,844268
6	8678,97	0,018827	0,020609	0,025617	0,065433	0,373837
7	9154,20	0,148179	0,157195	0,172365	0,226737	0,533374
8	9298,64	0,019028	0,020792	0,025239	0,052393	0,237315
9	9918,43	0,224246	0,237325	0,260735	0,354019	0,926542
10	10460,88	0,209813	0,222580	0,247015	0,360238	1,105209

com o MEFH são menores do que este valor apenas até 62000rad/s. Além disso, o MEFG com  $\beta_1 = 2\pi$  obteve erros menores do que 5% até aproximadamente 87000rad/s, enquanto o MEFH polinomial obteve tal precisão apenas até 77000rad/s.

As primeiras 10 frequências de vibração, mostradas na TABELA 9.3, foram melhor aproximadas pelo MEFH polinomial. Porém, os resultados obtidos com o MEFG tornam-se mais precisos do que aqueles obtidos com o MEFH para as frequências de vibração mais altas. Além disso, os erros obtidos com o MEFG com  $\beta_1 = \pi$ ,  $3\pi/2$  e  $2\pi$  são pequenos o suficiente para a maior parte das aplicações práticas. Nota-se também, que o MEFG com  $\beta_1 = \pi$  obteve resultados muito semelhantes ao MEFH para as frequências mais baixas.

### 9.1.3 Exemplo 12: chapa quadrada sujeita a carregamento de impacto

O terceiro exemplo deste capítulo é a chapa mostrada na FIGURA 9.12. As propriedades do material são  $E = 210\text{GPa}$ ,  $\nu = 0,3$  e  $\rho = 8000\text{kg/m}^3$ . A chapa possui espessura  $t = 0,01\text{m}$ ,  $L_x = 2\text{m}$  e  $L_y = 2\text{m}$ .

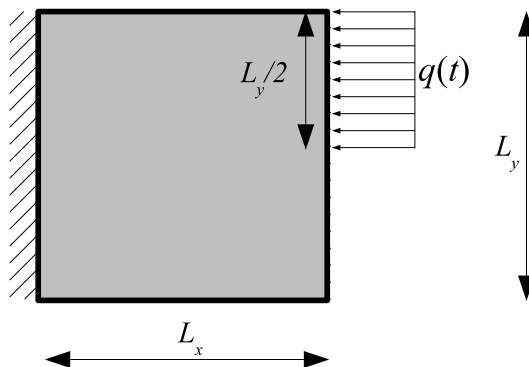
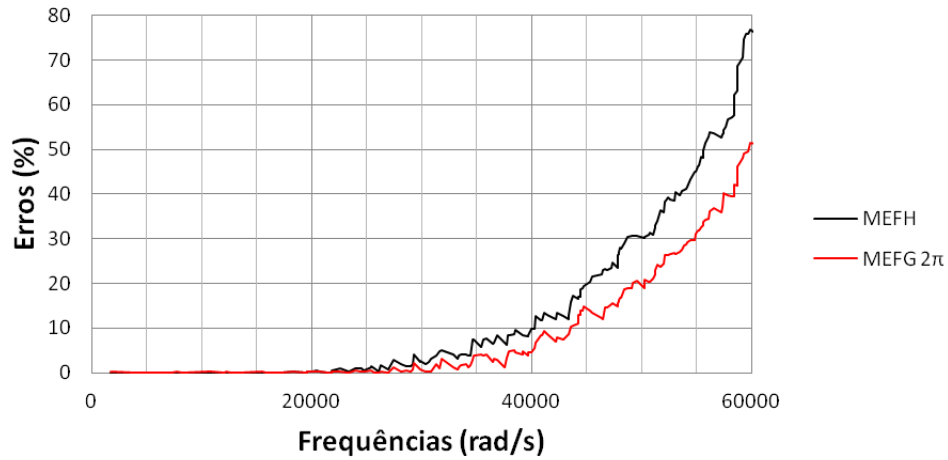


FIGURA 9.12 – EXEMPLO 12: CHAPA QUADRADA SUJEITA A CARREGAMENTO DE IMPACTO.

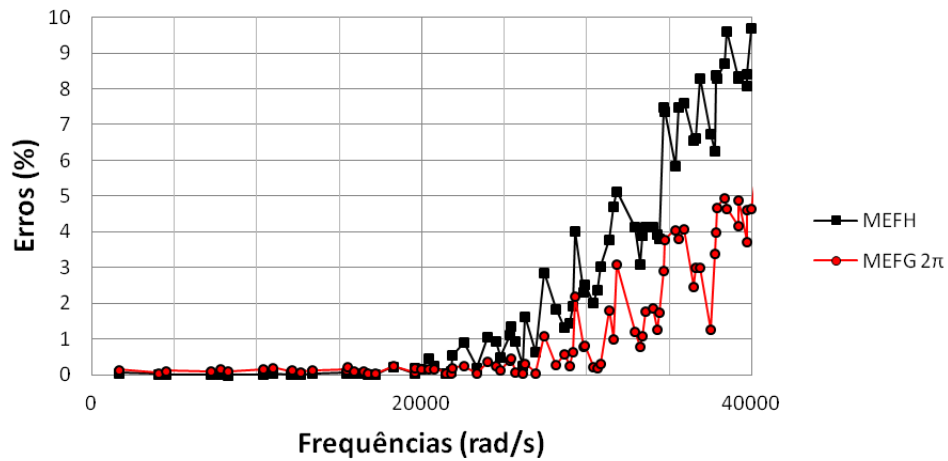
Os deslocamentos verticais e horizontais do lado esquerdo da chapa estão restritos. Um carregamento distribuído  $q(t)$  é aplicado em parte do lado direito. A solução de referência foi obtida com o MEFH polinomial com uma malha dada por 4x4 elementos finitos de ordem 9. As soluções aproximadas foram obtidas com o MEFH e o MEFG com  $\beta_1 = 2\pi$ , malhas dadas por 2x2 elementos finitos e  $n = 6$

Os erros relativos das frequências de vibração, calculados de acordo com a solução de referência, são mostrados na FIGURA 9.13. Nota-se que as mesmas tendências observadas nos casos anteriores repetem-se novamente. O MEFH polinomial obtém soluções mais precisas para as frequências de vibração mais baixas, mas o MEFG obtém resultados mais precisos para as frequências mais altas. Além disso, a faixa de frequências melhor aproximada pelo MEFH é uma faixa para a qual os erros são

pequenos também para o MEFG.



a)



b)

FIGURA 9.13 – EXEMPLO 12: ERROS RELATIVOS DAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG COM  $\beta_1 = 2\pi$ , PARA DIFERENTES FAIXAS DE FREQUÊNCIAS.

O carregamento  $q(t)$  foi modelado como um carregamento de impacto da forma:

$$q(t) = \begin{cases} f, & \text{se } t \leq t_f \\ 0, & \text{se } t > t_f \end{cases}, \quad (9.4)$$

onde  $f$  é um carregamento distribuído e  $t_f$  é o intervalo de tempo no qual este carregamento é aplicado. Este carregamento tem a forma mostrada na FIGURA 9.14.

A estrutura foi analisada para um carregamento de impacto  $q(t)$  com magnitude  $f = 10\text{kN/m}$  e  $t_f = 2 \times 10^{-4}\text{s}$ . O problema foi resolvido com o Método de Newmark com passo de tempo igual a  $\Delta t = 5 \times 10^{-7}\text{s}$ . Os deslocamentos horizontais para o nó

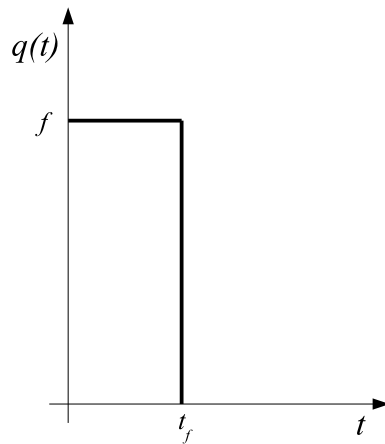
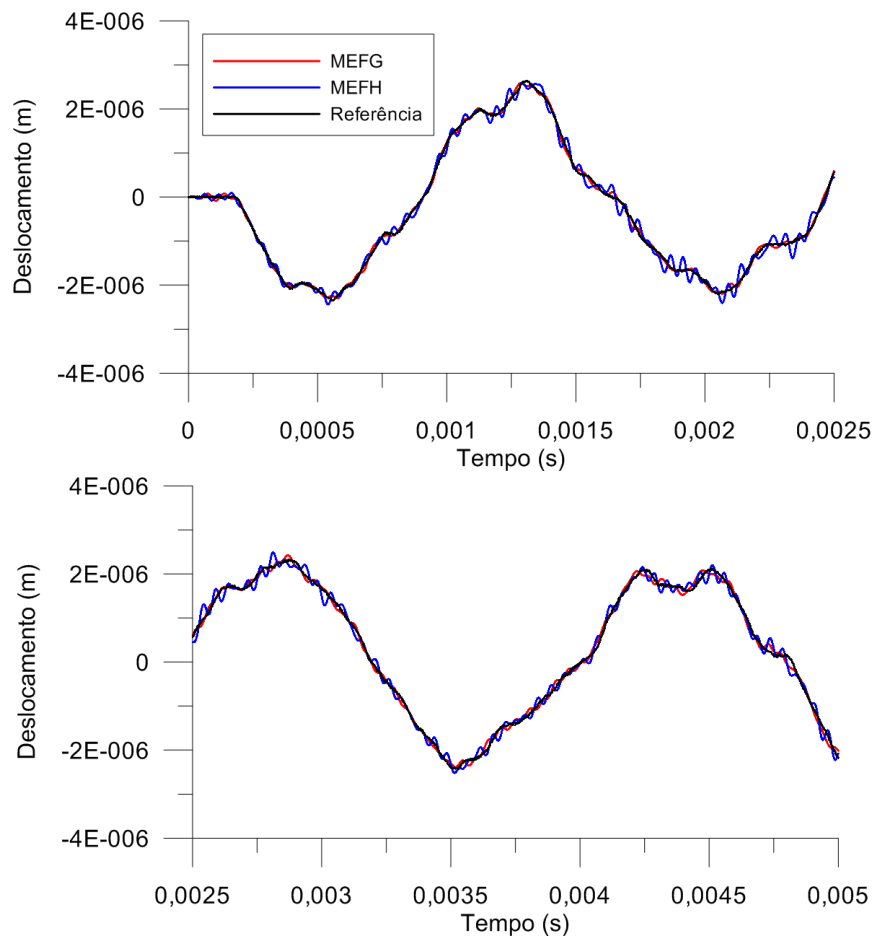


FIGURA 9.14 – EXEMPLO 12: CARREGAMENTO DE IMPACTO.

posicionado no centro da chapa são mostrados na FIGURA 9.15.

FIGURA 9.15 – EXEMPLO 12: DESLOCAMENTOS HORIZONTAIS NO CENTRO DA CHAPA QUADRADA PARA UM CARREGAMENTO DE IMPACTO COM DURAÇÃO  $t_f = 2 \times 10^{-4}$  s.

Da FIGURA 9.15 nota-se que ambas as soluções aproximadas são semelhantes à solução de referência. Porém, a solução obtida com o MEFH polinomial apresenta uma

variação maior em relação à solução de referência, indicando que o MEFG obteve uma aproximação mais precisa neste caso. Foi também avaliado o erro para os deslocamentos horizontais no centro da chapa, calculado de acordo com a equação (5.7) em relação à solução de referência. Neste caso o erro obtido com o MEFH polinomial foi igual a  $9,54 \times 10^{-4}$  m.s, enquanto que o erro obtido com o MEFG foi igual a  $5,28 \times 10^{-4}$  m.s. Isto confirma que os deslocamentos obtidos com o MEFG foram realmente mais precisos.

Sabe-se que na análise de estruturas sujeitas a carregamentos de impacto, a participação dos modos de vibração com frequências mais elevadas será maior quanto menor for o tempo de aplicação do impulso  $t_f$  (CHOPRA, 1995; CLOUGH; PENZIEN, 1975; MEIROVITCH, 1975, 1980). Neste exemplo foi utilizado um impulso com duração  $t_f$ , bastante reduzido, o que ocasionou a participação de modos com frequências mais elevadas. Como estas frequências foram melhor aproximadas pelo MEFG, a resposta no tempo obtido por este método foi mais precisa.

Aplicando-se agora um carregamento de impacto com mesma intensidade, porém com tempo de duração maior,  $t_f = 1 \times 10^{-3}$  s, espera-se que a participação dos modos mais altos seja reduzido. Os deslocamentos horizontais obtidos no centro da chapa são aqueles mostrados na FIGURA 9.16. Os erros calculados de acordo com a solução de referência foram iguais a  $8,56 \times 10^{-4}$  m.s para o MEFH polinomial e  $7,45 \times 10^{-4}$  m.s para o MEFG. Neste caso, nota-se que ambas as soluções possuem grau de precisão muito semelhante.

#### 9.1.4 Exemplo 13: estrutura sujeita a carregamentos dependentes do tempo

O último exemplo deste trabalho é a estrutura mostrada na FIGURA 9.17. As propriedades do material são  $E = 20$  GPa,  $\nu = 0,2$  e  $\rho = 2500$  kg/m<sup>3</sup>. A chapa possui espessura  $t = 1$  m,  $b = 5$  m e  $h = 30$  m. Os deslocamentos verticais e horizontais da base estão restritos. Um carregamento horizontal distribuído uniformemente  $q(t)$  é aplicado no topo da estrutura.

A solução de referência deste problema foi obtida com o MEFH polinomial de ordem 9, utilizando-se  $n = 10$  e uma malha regular de  $1 \times 6$  elementos finitos. As soluções aproximadas foram obtidas com o MEFH e o MEFG com  $\beta_1 = \pi$  e  $\beta_1 = 2\pi$ , utilizando-se  $n = 6$  e uma malha regular de  $1 \times 6$  elementos finitos. Os erros relativos obtidos para as frequências naturais de vibração são mostrados na FIGURA 9.18. Os erros obtidos para as primeiras 20 frequências naturais são mostrados na TABELA 9.4.

Pode-se notar que estes resultados seguem as tendências observadas nos exemplos anteriores. O MEFH obteve as primeiras frequências com maior precisão, enquanto que o MEFG obteve as frequências mais altas com maior precisão.

Com o MEFG com  $\beta_1 = \pi$  foi possível obter aproximações bastante precisas para



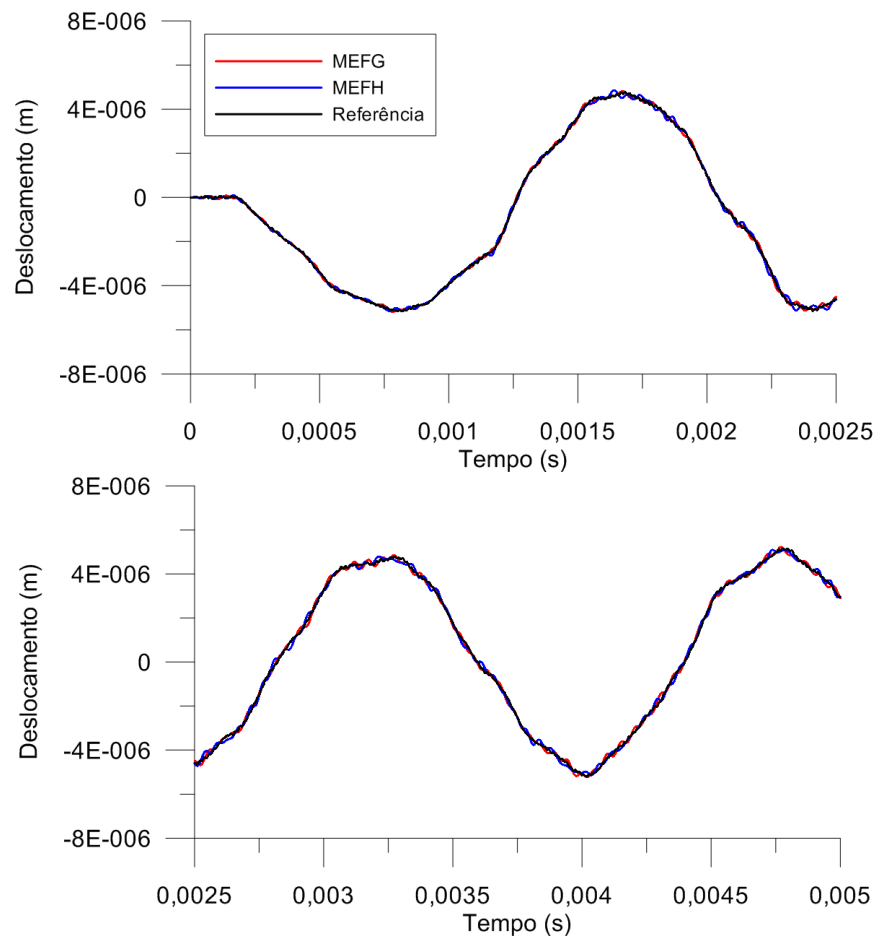


FIGURA 9.16 – EXEMPLO 12: DESLOCAMENTOS HORIZONTAIS NO CENTRO DA CHAPA QUADRADA PARA UM CARREGAMENTO DE IMPACTO COM DURAÇÃO  $t_f = 1 \times 10^{-3}$  s.

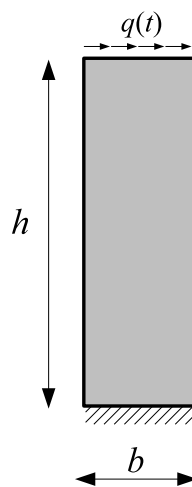
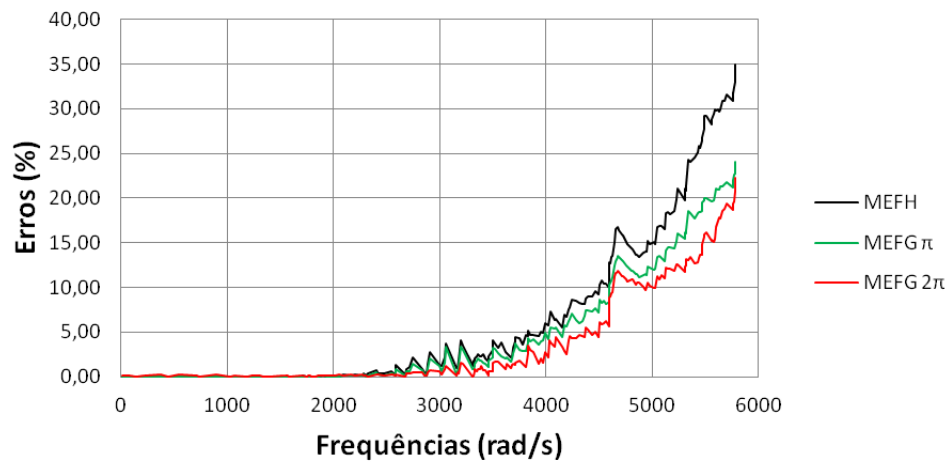
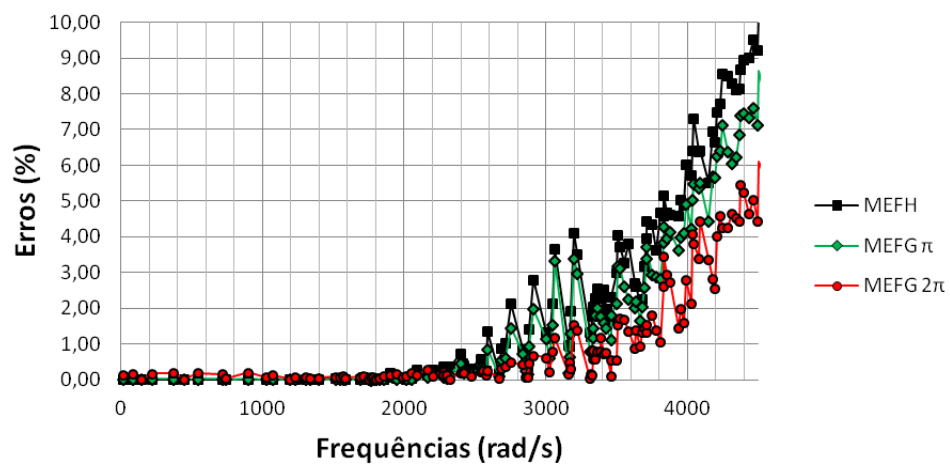


FIGURA 9.17 – EXEMPLO 13: ESTRUTURA SUJEITA A UM CARREGAMENTO HARMÔNICO.



a)



b)

FIGURA 9.18 – EXEMPLO 13: ERROS RELATIVOS DAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG, PARA DIFERENTES FAIXAS DE FREQUÊNCIAS.

TABELA 9.4 – EXEMPLO 13: ERROS RELATIVOS (%) DAS 20 PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS COM O MEFH E O MEFG.

MODO	FREQ. (rad/s)	MEFH	MEFG $\pi$	MEFG $2\pi$
1	15,644	9,9532E-03	1,1583E-02	1,4452E-01
2	88,315	1,2724E-02	1,4697E-02	1,5780E-01
3	148,220	3,0862E-03	3,4689E-03	7,1572E-03
4	218,427	1,4171E-02	1,6447E-02	1,7444E-01
5	374,244	1,4718E-02	1,7357E-02	1,8545E-01
6	444,256	3,1415E-03	3,5545E-03	1,9665E-02
7	544,389	1,4609E-02	1,7754E-02	1,8176E-01
8	721,043	1,4210E-02	1,7999E-02	1,5524E-01
9	738,820	3,2606E-03	3,7107E-03	4,0091E-02
10	899,454	1,4746E-02	1,8274E-02	2,0251E-01
11	1029,628	3,4593E-03	3,9412E-03	6,1170E-02
12	1071,021	1,4908E-02	1,7297E-02	1,2253E-01
13	1191,131	5,3073E-03	5,6122E-03	2,5984E-02
14	1229,457	1,1525E-02	1,0613E-02	6,2313E-02
15	1309,505	3,7223E-03	4,2310E-03	7,6155E-02
16	1335,945	1,6565E-02	1,4360E-02	5,6946E-02
17	1396,525	1,6995E-02	1,1464E-02	5,0477E-02
18	1520,839	3,9288E-02	2,5530E-02	7,5315E-02
19	1548,169	3,7335E-03	3,8390E-03	8,4110E-02
20	1572,970	2,7960E-02	9,1897E-03	1,1648E-01

as primeiras frequências, com erros bastante semelhantes aqueles obtidos com o MEFH. Porém, o MEFG com  $\beta_1 = \pi$  ainda é capaz de obter resultados mais precisos do que aqueles obtidos com o MEFH polinomial para as frequências mais altas.

A análise de resposta no tempo foi realizada com um carregamento  $q(t)$  da forma

$$q(t) = f \sin(\omega t), \quad (9.5)$$

com intensidade  $f = 10\text{kN/m}$  e frequência de excitação  $\omega = 50\text{rad/s}$ . O Método de Newmark foi utilizado com um passo de tempo  $\Delta t = 5 \times 10^{-4}\text{s}$ .

Os deslocamentos horizontais no nó com coordenadas (0;20)m, obtidos com o MEFH polinomial e o MEFG com  $\beta_1 = 2\pi$ , são mostrados na FIGURA 9.19. Nota-se grande concordância das respostas obtidas por ambos os métodos com a solução de referência. Porém, neste caso o MEFG apresenta maior desvio em relação à solução de referência. Já os deslocamentos obtidos com o MEFH polinomial são praticamente idênticos aqueles da solução de referência. Os deslocamentos obtidos com o MEFG com  $\beta_1 = \pi$  não são mostrados pois são também praticamente idênticos aos obtidos com o MEFH e a solução de referência.

Foram também calculados os erros em função da solução de referência. Os erros

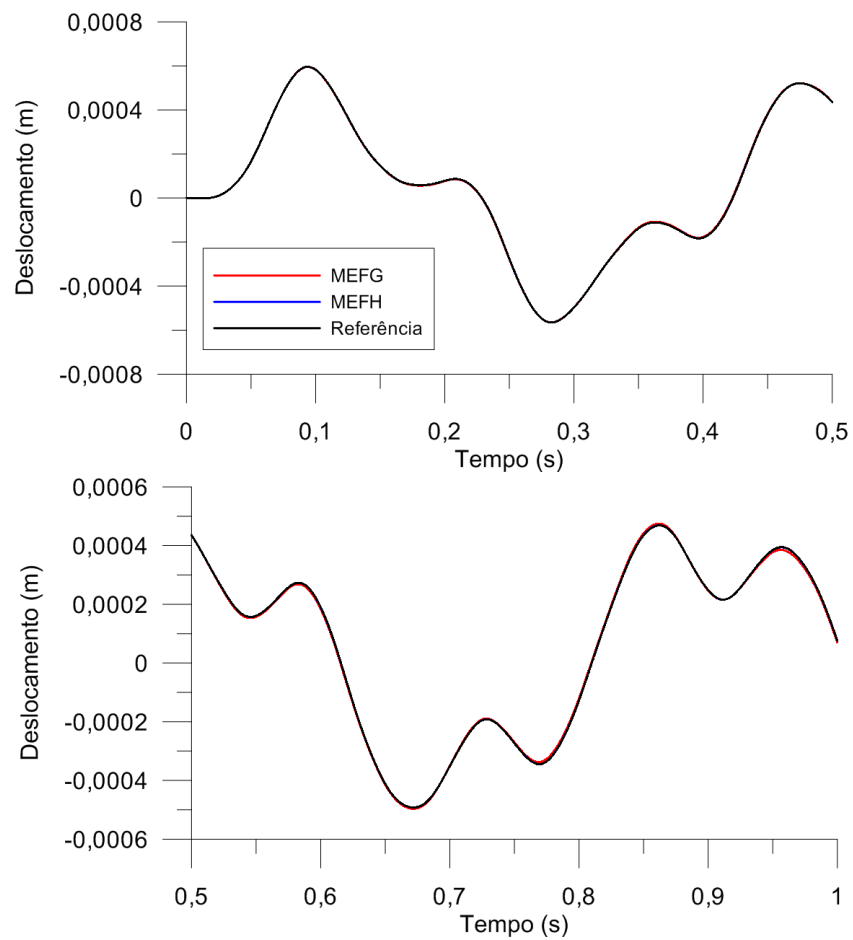


FIGURA 9.19 – EXEMPLO 13: DESLOCAMENTOS HORIZONTAIS NO NÓ COM COORDENADA (0; 20)m, PARA UM CARREGAMENTO HARMÔNICO COM FREQUÊNCIA  $\omega = 50\text{rad/s}$ , OBTIDOS COM O MEFH E O MFG COM  $\beta_1 = 2\pi$ .

obtidos foram iguais a :  $4,15 \times 10^{-4} \text{m.s}$  com o MEFH polinomial,  $4,83 \times 10^{-4} \text{m.s}$  com o MEFG com  $\beta_1 = \pi$  e  $5,98 \times 10^{-3} \text{m.s}$  com o MEFG com  $\beta_1 = 2\pi$ . Nota-se, portanto, que o MEFH obteve a solução mais precisa dos três casos. Porém, os erros obtidos com o MEFG com  $\beta_1 = \pi$  foram muito semelhantes aqueles obtidos com o MEFH.

Vale a pena ressaltar que a estrutura modelada neste exemplo pode ser vista como uma viga engastada na base. Portanto, para o carregamento aplicado a estrutura desenvolve um comportamento muito semelhante àquele da flexão pura. Porém, sabe-se que elementos lineares não são adequados para a representação de problemas do estado plano de tensões que apresentem comportamentos flexionais, uma vez que elementos lineares não são capazes de representar as variações lineares de tensões que aparecem ao longo da seção transversal de vigas (BATHE, 1996).

Nestes casos recomenda-se a utilização de elementos de ordem pelo menos quadrática, de forma a possibilitar a correta representação do comportamento flexional. Assim, a formulação do MEFH polinomial utilizada satisfaz esta recomendação.

Já no caso do MEFG, nota-se que o elemento é obtido adicionando-se as funções trigonométricas a um elemento originalmente linear. Assim, é interessante o fato deste elemento ter sido capaz de obter uma solução aproximada precisa neste caso, já que não são utilizadas as funções quadráticas necessárias para se representar a variação linear de tensões.

## 10 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou uma formulação do MEFG para problemas de análise dinâmica de barras, treliças, vigas, pórticos, equação da onda bidimensional e estado plano de tensões. A formulação do MEFG foi baseada naquela proposta por Arndt (2009). O método foi aplicado para a análise modal e transiente, utilizando o Método da Superposição Modal em alguns casos e o Método de Newmark em outros. O MEFG foi comparado com o MEF polinomial, em sua forma padrão e hierárquica (MEFH).

Os resultados obtidos indicam que o MEFG proposto neste trabalho é capaz de obter as frequências naturais de vibração mais elevadas com maior precisão do que o MEFH polinomial. Já as frequências de vibração mais baixas podem ser obtidas com maior precisão pelo MEFH polinomial. Porém, de forma geral, os erros obtidos com o MEFG na faixa de frequências para as quais o MEFH polinomial é mais preciso são bastantes pequenos.

No caso da análise para resposta no tempo, nota-se que os problemas que envolvem a participação dos modos com frequências mais altas são melhor aproximados pelo MEFG do que pelo MEFH polinomial. Este fato parece ser consequência direta de que os modos e frequências mais altos são melhor aproximados pelo MEFG, como observado nas análises modais. O MEFH é capaz de obter soluções mais precisas quando apenas as frequências de ordem mais baixas são significativas para o problema, mas nestes casos os erros obtidos com o MEFG são, em geral, pequenos.

Tanto o MEFG quanto o MEFH descritos neste trabalho são métodos hierárquicos, no sentido de que a ordem da aproximação pode ser aumentada sem modificar as funções de aproximação já utilizadas. Isto facilita bastante a implementação e utilização de elementos de ordem elevada. Vale a pena ressaltar que na maioria dos exemplos estudados aqui o MEFG foi comparado com o MEFH de ordem entre 5 e 9, que são aproximações de ordens relativamente elevadas.

Observou-se que para alguns valores de  $\beta_k$  o MEFG comporta-se de forma bastante semelhante ao MEFH polinomial. Porém, modificando-se este parâmetro é possível mudar a faixa de frequências melhor aproximada pelo método. Em particular  $\beta_k = \pi$  parece gerar um método muito semelhante ao MEFH polinomial, enquanto  $\beta_k = 2\pi$  parece permitir a aproximação dos modos mais altos com maior precisão sem comprometer demais a precisão dos modos mais baixos. A utilização de  $\beta_k > 2\pi$  parece gerar aproximações muito boas para os modos mais altos, porém ao custo de resultados pouco precisos para as frequências mais baixas.

Para os problemas de barras, treliças, vigas e pórticos, é bastante evidente o ganho de precisão obtido com o MEFG para as frequências de vibração mais altas. Para problemas de resposta no tempo, a utilização de excitações com frequências elevadas permite observar que em alguns casos o MEFG obtém soluções muito precisas enquanto o MEFH obtém soluções relativamente pobres.

Para os problemas envolvendo o estado plano de tensões, nota-se que o ganho de precisão para as frequências mais altas foi menos pronunciado. Além disso, a diferença é visível apenas para modos com frequências extremamente elevadas. Assim, as análises para resposta no tempo produzem resultados muito semelhantes entre o MEFG e o MEFH polinomial. Mesmo assim, o MEFG produziu melhores resultados em problemas relacionados com carregamentos de impacto, um caso sabidamente problemático do ponto de vista computacional.

Particular atenção deve ser dedicada aos problemas envolvendo a equação da onda bidimensional. Neste caso, nota-se que o ganho de precisão para as frequências mais altas foi bastante pronunciado. Assim o MEFG foi capaz de obter soluções mais precisas do que o MEFH para a maior parte dos problemas analisados.

Em geral, observa-se que o MEFG foi mais eficiente para problemas que envolvem a participação dos modos mais elevados de vibração. Sabe-se que estes modos são particularmente importantes para problemas relativos à propagação de ondas no domínio do problema, onde uma boa aproximação para o comportamento global do problema não garante necessariamente uma boa aproximação para as variações locais dentro do domínio. Isto indica que o MEFG possui um potencial de aplicação bastante interessante para problemas envolvendo a propagação de ondas dentro de domínios e não propriamente a análise dinâmica global de alguma estrutura.

Devido à extensão do tema estudado, alguns tópicos não puderam ser abordados extensivamente. Assim, existem diversas possibilidades para estudos futuros.

Uma questão bastante importante que pode ser estudada em maiores detalhes é o desenvolvimento de formulações alternativas àquela apresentada aqui para o MEFG com aplicações a problemas da análise dinâmica. Grande parte do estudo realizado aqui foi baseado no MEFG proposto por Arndt (2009), no qual as funções de forma são definidas dentro dos elementos finitos. Assim, o refino da malha do tipo  $h$  gera uma sequência de espaços de aproximação que não estão contidos uns nos outros. Portanto, não há garantia de convergência monotônica das frequências de vibração no caso do refino  $h$ . Neste sentido, a formulação de funções do MEFG em sua forma mais tradicional, que não estejam atreladas aos elementos finitos, mas sim permaneçam inalteradas ao se refinar a malha, pode ser tópico de trabalhos futuros.

Outro ponto que não pôde ser abordado neste trabalho é o condicionamento do

sistema de equações resultante do MEFG aqui proposto. Sabe-se que algumas formulações do MEFG podem gerar problemas mal condicionados, aumentando assim o esforço computacional necessário para se obter a solução e degradando a sua precisão. Neste trabalho estas condições não foram analisadas em maiores detalhes.

Algumas abordagens para a avaliação do condicionamento de sistemas de equações lineares estão disponíveis na literatura. A maior parte destas abordagens envolve a avaliação do condicionamento da matriz de rigidez do problema. Porém, em problemas da análise dinâmica são utilizadas as matrizes de rigidez e de massa. Assim, a avaliação de condicionamento através apenas das matrizes de rigidez pode não ser válida. Além disso, a análise modal resolve, na verdade, um problema de autovalores e autovetores generalizado. Portanto, matrizes mal condicionadas do ponto de vista da solução de sistemas de equações lineares podem não necessariamente gerar problemas de autovalores mal condicionados. Evidencia-se, portanto, a necessidade por uma forma adequada de se mensurar o condicionamento de problemas relacionados a análise dinâmica e modal.

Para os problemas bidimensionais estudados neste trabalho, não foi possível realizar o refino do tipo  $p$  para o MEFG porque as matrizes tornaram-se mal condicionadas. Uma modificação do MEFG para tornar o método mais estável foi apresentada por Babuska e Banerjee (2012). Assim, é possível que os conceitos apresentados por Babuska e Banerjee (2012) permitam modificar a formulação do MEFG apresentada aqui para tornar o método mais estável e possibilitar o refino do tipo  $p$  em problemas bidimensionais.

Alguns problemas clássicos da análise estrutural não foram analisados neste trabalho, como o caso de placas espessas, problemas axissimétricos e estado tridimensional de tensões. Também não foi verificada a qualidade das aproximações para as tensões, apenas para deslocamentos. Por fim, não foi realizado um estudo sobre a influência de esquemas de diagonalização da matriz de massa nos resultados, um procedimento que pode ser capaz de reduzir o esforço computacional envolvido quando utilizado em conjunto com o Método da Diferença Central para a análise para resposta no tempo. Assim, a verificação da eficiência do MEFG nestes casos pode ser objeto de pesquisas futuras.

O MEF tornou-se, ao longo dos anos, uma ferramenta importante e muito difundida para a solução de diversos problemas das ciências e engenharias. Este fato deve-se principalmente à sua flexibilidade e eficiência quando aplicado a um grande número de fenômenos. Porém, muitos trabalhos indicam que o MEF padrão pode encontrar dificuldades para obter soluções aproximadas precisas em certas situações. Neste contexto, muitas modificações e extensões do MEF foram propostas, com o intuito



de apresentar formulações mais eficientes para alguns problemas. O desenvolvimento do MPU e do MEFG forneceu uma base geral e robusta que permite adaptações do MEF para inúmeras situações. A aplicação destes métodos em diversos casos permitiu a obtenção de soluções mais precisas ou formulações mais flexíveis, que evitem algumas limitações do MEF padrão.

Os resultados deste trabalho e do trabalho de Arndt (2009) demonstram um grande potencial do MEFG para solucionar problemas da análise dinâmica. Isto porque o método foi capaz de suprir deficiências do MEF padrão em muitos exemplos, em particular, a solução de problemas que envolvem os modos e frequências de vibração mais elevados.

Assim, o recente sucesso de aplicações do MEFG para problemas no qual o MEF padrão pode encontrar dificuldades parece se repetir no caso da análise dinâmica de estruturas. Portanto, espera-se que estudos futuros nesta área permitam um grande avanço dos métodos numéricos utilizados para os problemas da equação da onda, da análise dinâmica de estruturas e de outros fenômenos oscilatórios relacionados com estes problemas.

## REFERÊNCIAS

- ABDELAZIZ, Y.; HAMOUI, A. A survey of the extended finite element. **Computers & Structures**, v. 86, p. 1141–1151, 2008.
- AMES, W. **Numerical Methods for Partial Differential Equations**. Orlando: Academic Press, 1977.
- ARNDT, M. **O Método dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado à Análise de Vibrações Livres de Estruturas Reticuladas**. Tese (Doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia) — Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.
- ARNDT, M.; MACHADO, R.; HECKE, M. The composite element method applied to free vibration analysis of trusses and beams. **Applied Numerical Mathematics**, v. 47, p. 59–73, 2003.
- ARNDT, M.; MACHADO, R.; SCREMIN, A. An adaptive generalized finite element method applied to free vibration analysis of straight bars and trusses. **Journal of Sound and Vibration**, v. 329, p. 659–672, 2010.
- ARNDT, M.; MACHADO, R. D.; SCREMIN, A. The generalized finite element method applied to free vibration of framed structures. In: EBRAHIMI, F. (Ed.). **Advances in Vibration Analysis Research**. Rijeka: InTech, 2011. p. 187–212.
- BABUSKA, I.; AZIZ, A. Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method. In: AZIZ, A. (Ed.). **The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations**. New York: Academic Press, 1972. p. 5–359.
- BABUSKA, I.; BANERJEE, U. Stable generalized finite element method (sgfem). **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 201-204, p. 91–111, 2012.
- BABUSKA, I.; BANERJEE, U.; OSBORN, J. On principles for the selection of shape functions for the generalized finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 19, p. 5595–5629, 2002.
- BABUSKA, I.; BANERJEE, U.; OSBORN, J. Survey of meshless and generalized finite element methods: A unified approach. **Acta Numerica, Cambridge University Press**, v. 12, p. 1–125, 2003.
- BABUSKA, I.; BANERJEE, U.; OSBORN, J. **Generalized Finite Element Methods: Main Ideas, Results, and Perspective**. Austin: Institute for Computational Engineering and Sciences, University of Texas at Austin, 2004. 38p. Relatório Técnico.
- BABUSKA, I.; MELENK, J. The partition of unity method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, n. 4, p. 727–758, 1997.

BANERJEE, J. Dynamic stiffness formulation for structural elements: a general approach. **Computers & Structures**, v. 63, n. 1, p. 101–103, 1997.

BARDELL, N. Free vibration analysis of a flat plate using the hierarchical finite element method. **Journal of Sound and Vibration**, v. 151, p. 263–289, 1991.

BARROS, F. **Métodos Sem Malha e Método dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não Linear de Estruturas**. Tese (Doutorado em Engenharia e Estruturas) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996.

BECKER, A.; CAREY, G. F.; ODEN, J. T. **Finite Elements: An Introduction**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1981.

BELYTSCHKO, T.; GRACIE, R.; VENTURA, G. A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. **Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering**, v. 17, n. 4, p. 1–31, 2009.

BELYTSCHKO, T.; LU, Y.; GU, L. Crack-propagation by element-free galerkin methods. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 51, n. 2, p. 295–315, 1995.

BESLIN, O.; NICOLAS, J. A hierarchical functions set for predicting very high order plate bending modes with any boundary conditions. **Journal of Sound and Vibration**, v. 202, n. 5, p. 633–655, 1997.

BREBBIA, C.; DOMINGUEZ, J. **Boundary Elements: An Introductory Course**. Southampton: WIT Press, 1992.

BREBBIA, C.; NARDINI, D. Dynamic analysis in solid mechanics by an alternative boundary element procedure. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, v. 2, n. 4, p. 228–233, 1983.

BREZZI, F.; FORTIN, M. **Mixed and Hybrid Finite Element Methods**. New York: Springer-Verlag, 1991.

BYRON, F. W.; FULLER, R. W. **Mathematics of Classical and Quantum Physics**. New York: Dover Publications, 1992.

CAREY, G. F.; ODEN, J. T. **Finite Elements: A Second Course**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1983.

CAREY, G. F.; ODEN, J. T. **Finite Elements: Computational Aspects**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1984.

CARRER, J.; MANSUR, W. Stress and velocity in 2d transient elastodynamic analysis by the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 23, n. 3, p. 233–245, 1999.

CHANG, S. A new family of explicit methods for linear structural dynamics. **Computers & Structures**, v. 88, n. 11-12, p. 755–772, 2010.

- CHIEN, C.; YANG, C.; TANG, J. Three-dimensional transient elastodynamic analysis by a space and time-discontinuous galerkin finite element method. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 39, n. 7, p. 561–580, 2003.
- CHO, J.; SONG, Y.; CHOI, Y. Boundary locking induced by penalty enforcement of essential boundary conditions in mesh-free methods. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, n. 13-16, p. 1167–1183, 2008.
- CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1995.
- CHUNG, J.; HULBERT, G. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- $\alpha$  method. **Journal of Applied Mechanics**, v. 60, n. 2, p. 371–375, 1993.
- CIARLET, P. G. **The Finite Element Method for Elliptic Problems**. Amsterdam: North Holland, 1978.
- CLOUGH, R.; PENZIEN, J. **Dynamics of structures**. New York: McGraw-Hill, 1975.
- DAUX, C.; MOES, N.; DOLBOW, J.; SUKUMAR, N.; BELYTSCHKO, T. Arbitrary branched and intersecting cracks with extended finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 48, n. 12, p. 1741–1760, 2000.
- DE BEL, E.; VILLON, P.; BOUILLARD, P. Forced vibrations in the medium frequency range solved by a partition of unity method with local information. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 62, n. 9, p. 1105–1126, 2005.
- DE, S.; BATHE, K. The method of finite spheres with improved numerical integration. **Computers & Structures**, v. 79, n. 22-25, p. 2183–2196, 2001.
- DI PAOLA, M.; FAILLA, G. A correction method for dynamic analysis of linear systems. **Computers & Structures**, v. 82, n. 15-16, p. 1217–1226, 2004.
- DUARTE, C.; HAMZEH, O.; LISZKA, T.; TWORZYDLO, W. A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 15-17, p. 2227–2262, 2001.
- DUARTE, C.; KIM, D. Analysis and applications of a generalized finite element method with global-local enrichment functions. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, n. 6-8, p. 487–504, 2008.
- DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. An h-p adaptive method using clouds. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, n. 1-4, p. 237–262, 1996.
- DUFFY, D. G. **Advanced Engineering Mathematics**. Boca Raton: CRC Press, 1998.
- ELGUEDJ, T.; GRAVOUIL, A.; MAIGRE, H. An explicit dynamics extended finite element method. part 1: mass lumping for arbitrary enrichment functions. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, n. 30-32, p. 2297–2317, 2009.
- ENGELS, R. Finite element modeling of dynamic behavior of some basic structural members. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 114, n. 1, p. 3–9, 1992.

- FUNG, T. Unconditionally stable higher-order newmark methods by sub-stepping procedure. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 147, n. 1-2, p. 61–84, 1997.
- FUNG, Y. **Foundations of Solid Mechanics**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1965.
- GANESAN, N.; ENGELS, R. Hierarchical bernoulli-euler beam finite elements. **Computers & Structures**, v. 43, n. 2, p. 297–304, 1992.
- GAUL, L.; KOGL, M.; WAGNER, M. **Boundary Element Methods for Engineers and Scientists**. Berlin: Springer, 2003.
- GRAVOUIL, A.; ELGUEDJ, T.; MAIGRE, H. An explicit dynamics extended finite element method. part 2: element by element stable-explicit/explicit dynamic scheme. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, n. 30-32, p. 2318–2328, 2009.
- GREENBERG, M. **Advanced Engineering Mathematics**. 2. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1998.
- HAZARD, L.; BOUILLARD, P. Structural dynamics of viscoelastic sandwich plates by the partition of unity finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 196, n. 41-44, p. 4101–4116, 2007.
- HILBER, H.; HUGHES, T.; TAYLOR, R. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, v. 5, n. 3, p. 283–292, 1977.
- HIRSCH, C. **Numerical Computation of Internal and External Flows: Fundamentals of Numerical Discretization**. Chichester: John Wiley & Sons, 1988.
- HOUMAT, A. An alternative hierarchical finite element formulation applied to plate vibrations. **Journal of Sound and Vibration**, v. 206, n. 2, p. 201–215, 1997.
- HUGHES, T. J. **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1987.
- JUN, S.; LIU, W.; BELYTSCHKO, T. Explicit reproducing kernel particle methods for large deformation problems. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, v. 41, n. 1, p. 137–166, 1998.
- KELLEY, C. **Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995.
- KIRSCH, U.; BOGOMOLNI, M. Nonlinear and dynamic structural analysis using combined approximations. **Computers & Structures**, v. 85, n. 10, p. 566–578, 2007.
- KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. New York: John Wiley & Sons, 1978.
- KREYSZIG, E. **Advanced Engineering Mathematics**. 9. ed. New York: John Wiley & Sons, 2006.
- LAW, S.; LU, Z. Crack identification in beam from dynamic responses. **Journal of Sound and Vibration**, v. 285, n. 4-5, p. 967–987, 2005.

- LEUNG, A.; AU, F. Spline finite elements for beam and plate. **Computers & Structures**, v. 37, n. 5, p. 717–729, 1990.
- LEUNG, A.; CHAN, J. Fourier p-element for the analysis of beams and plates. **Journal of Sound and Vibration**, v. 212, n. 1, p. 179–185, 1998.
- LEUNG, A.; ZHU, B. Fourier p-elements for curved beam vibrations. **Thin-Walled Structures**, v. 42, n. 1, p. 39–57, 2004.
- LEUNG, A.; ZHU, B.; ZHENG, J.; YANG, H. Analytic trapezoidal fourier p-element for vibrating plane problems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 271, n. 1-2, p. 67–81, 2004.
- LEVEQUE, R. **Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems**. Philadelphia: SIAM, 2007.
- LEVY, E.; EISENBERGER, M. Dynamic analysis of trusses including the effect of local modes. **Structural Engineering and Mechanics**, v. 7, n. 1, p. 81–94, 1999.
- LIEW, K.; HE, X.; TAN, M.; LIM, H. Dynamic analysis of laminated composite plates with piezoelectric sensor/actuator patches using the fsdt mesh-free method. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 46, n. 3, p. 411–431, 2004.
- LIEW, K.; NG, T.; ZHAO, X.; REDDY, J. Harmonic reproducing kernel particle method for free vibration analysis of rotating cylindrical shells. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 191, n. 37-38, p. 4141–4157, 2002.
- LIEW, K.; PENG, L.; KITIPORNCHAI, S. Vibration analysis of corrugated reissner-mindlin plates using a mesh-free galerkin method. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 51, n. 9-10, p. 642–652, 2009.
- LISZKA, T.; DUARTE, C.; TWORZYDLO, W. hp-meshless clouds method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, n. 1-4, p. 263–288, 1996.
- LIU, G. **Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method**. Boca Raton: CRC Press, 2003.
- LIU, W.; JUN, S.; LI, S.; ADEE, J.; BELYTSCHKO, T. Reproducing kernel particle methods for structural dynamics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 38, n. 10, p. 1655–1679, 1995.
- MALVERN, L. **Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1969.
- MANGINI, M. **Método dos Elementos Finitos Generalizados para Análise de Estruturas em Casca de Revolução**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.
- MAPLESOFT. **Maple 13**. Waterloo, ON: Maplesoft, 2009.
- MATHWORKS. **MATLAB 2011a**. Natick, MA: The Mathworks Inc., 2011.
- MEIROVITCH, L. **Elements of Vibration Analysis**. Tokio: McGraw-Hill, 1975.

- MEIROVITCH, L. **Computational Methods in Structural Dynamics**. Berlin: Springer, 1980.
- MELENK, J.; BABUSKA, I. **The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications**. Austin: Institute for Computational Engineering and Sciences, University of Texas at Austin, 1996. a, 32p. Relatório Técnico.
- MELENK, J.; BABUSKA, I. The partition of unity method: basic theory and applications. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, n. 1-4, p. 289–314, 1996. b.
- MORGAN, R. Preconditioning eigenvalues and some comparison of solvers. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 123, n. 1, p. 111–115, 2000.
- MOUSAVI, S.; SUKUMAR, N. Generalized gaussian quadrature rules for discontinuities and crack singularities in the extended finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, n. 49-52, p. 3237–3249, 2010.
- NETO, E. M.; BARRETO, S.; PAVANELLO, R. Dynamic behavior of frame structures by boundary integral procedures. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 24, n. 5, p. 399–406, 2000.
- ODEN, J.; DUARTE, C.; ZIENKIEWICZ, O. A new cloud based hp finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 153, n. 1-2, p. 117–126, 1998.
- ODEN, J. T.; CAREY, G. F. **Finite Elements: Mathematical Aspects**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1983.
- OYARZÚN, P.; LOUREIRO, F.; CARRER, J.; MANSUR, W. A time-stepping scheme based on numerical green's functions for the domain boundary element method: The exga-dbem newmark approach. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 35, n. 3, p. 533–542, 2011.
- PEANO, A. Hierarchies of conforming finite elements for plane elasticity and plate bending. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 2, n. 3-4, p. 211–224, 1976.
- PETYT, M. **Introduction to finite element vibration analysis**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- PINCHOVER, Y.; RUBINSTEIN, J. **An Introduction to Partial Differential Equations**. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- QUARTERONI, A.; SACCO, R.; SALERI, F. **Numerical Mathematics**. 2. ed. Berlin: Springer, 2007.
- RAO, S. **Mechanical Vibrations**. 3. ed. Addison-Wesley: Reading, 1995.
- RAO, S. **The finite element method in engineering**. Amsterdam: Elsevier, 2005.
- REDDY, B. D. **Introductory Functional Analysis: With Applications to Boundary Value Problems and Finite Elements**. New York: Springer, 1998.

- RIBEIRO, P. Hierarchical finite element analyses of geometrically non-linear vibration of beams and plane frames. **Journal of Sound and Vibration**, v. 246, n. 2, p. 225–244, 2001.
- ROZYCKI, P.; MOES, N.; BECHET, E.; DUBOIS, C. X-fem explicit dynamics for constant strain elements to alleviate mesh constraints on internal or external boundaries. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, n. 5, p. 349–363, 2008.
- SHAH, A.; RIBAKOV, Y. Non-destructive measurements of crack assessment and defect detection in concrete structures. **Materials and Design**, v. 29, n. 1, p. 61–69, 2008.
- SHISHVAN, S.; NOORZAD, A.; ANSARI, A. A time integration algorithm for linear transient analysis based on the reproducing kernel method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, n. 41-44, p. 3361–3377, 2009.
- SIMANI, S.; FANTUZZI, C. Dynamic system identification and model-based fault diagnosis of an industrial gas turbine prototype. **Mechatronics**, v. 16, n. 6, p. 341–363, 2006.
- SOLÍN, P.; SEGETH, K.; DOLEZEL, I. **Higher-Order Finite Element Methods**. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2004. (Studies in Advanced Mathematics).
- STOER, J.; BULIRSCH, R. **Introduction to Numerical Analysis**. New York: Springer-Verlag, 1993.
- STROUBOULIS, T.; BABUSKA, I.; COPPS, K. The design and analysis of the generalized finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 181, n. 1-3, p. 43–69, 2000. a.
- STROUBOULIS, T.; BABUSKA, I.; HIDAJAT, R. The generalized finite element method for helmholtz equation: Theory, computation, and open problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, p. 4711–4731, 2006.
- STROUBOULIS, T.; COPPS, K.; BABUSKA, I. The generalized finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 190, p. 4081–4193, 2001.
- STROUBOULIS, T.; ZHANG, L.; WANG, D.; BABUSKA, I. A posteriori error estimation for generalized finite element methods. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, n. 9-12, p. 852–879, 2006.
- TAYLOR, R.; ZIENKIEWICZ, O.; OÑATE, E. A hierarchical finite element method based on the partition of unity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 152, n. 1-2, p. 73–84, 1998.
- TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. **Theory of Elasticity**. New York: McGraw-Hill, 1951.
- TORII, A.; MACHADO, R. Transient dynamic structural analysis of bars and trusses using the generalized finite element method. **Mecánica Computacional**, v. 23, n. 18, p. 1861–1877, 2010.
- TORII, A.; MACHADO, R. Structural dynamic analysis for time response of bars and trusses using the generalized finite element method. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 9, n. 3, p. 309–337, 2012.



TORII, A.; OLIVEIRA, M.; CARRER, J.; MACHADO, R. A comparison between the boundary element method and the finite element method for 2d wave equation. In: XXXII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING (CILAMCE 2011), 2011. **Proceedings of the XXXII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE 2011)**. Ouro Preto, 2011. a.

TORII, A.; OLIVEIRA, M.; CARRER, J.; MACHADO, R. A comparison between the boundary element method and the hierarchical finite element method for one-dimensional elastodynamics. In: 21ST BRAZILIAN CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING (COBEM 2011), 2011. **Proceedings of the 21st Brazilian Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2011)**. Natal, 2011. b.

VIOLA, E.; FEDERICI, L.; NOBILE, L. Detection of crack location using cracked beam element method for structural analysis. **Theoretical and Applied Fracture Mechanics**, v. 36, n. 1, p. 23–35, 2001.

WEAVER, W.; LOH, L. Dynamics of trusses by component-mode method. **Journal of Structural Engineering**, v. 111, n. 12, p. 2565–2575, 1985.

WROBEL, L. **The Boundary Element Method: Applications in Thermo-Fluids and Acoustics**. Chichester: Wiley, 2002.

WROBEL, L.; ALIABADI, M. **The Boundary Element Method: Applications in Solids and Structures**. Chichester: Wiley, 2002.

ZENG, P. Composite element method for vibration analysis of structures, part i: Principle and  $c^0$  element (bar). **Journal of Sound and Vibration**, v. 218, n. 4, p. 619–658, 1998. a.

ZENG, P. Composite element method for vibration analysis of structures, part ii:  $c^1$  element (beam). **Journal of Sound and Vibration**, v. 218, n. 4, p. 659–696, 1998. b.

ZHOU, J.; ZHANG, H.; ZHANG, L. Reproducing kernel particle method for free and forced vibration analysis. **Journal of Sound and Vibration**, v. 279, n. 1-2, p. 389–402, 2005.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method: The Basis**. 5. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.

## APÊNDICE A - SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DA ANÁLISE DINÂMICA

### A.1 MÉTODO DE NEWMARK

O Método de Newmark é uma das alternativas para se resolver o problema dado pela equação (6.45). Neste caso assume-se uma discretização do tempo total de análise da forma

$$\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n\} \quad (\text{A.1})$$

sendo

$$t_1 = t_0 + \Delta t, \quad t_2 = t_1 + \Delta t, \quad \dots, \quad t_{n-1} = t_{n-2} + \Delta t, \quad t_n = t_{n-1} + \Delta t, \quad (\text{A.2})$$

onde  $\Delta t$  é o passo de tempo definido antes da análise dinâmica. A solução aproximada é então avaliada nos tempos  $\{t_i\}$ , ou seja, buscam-se os valores dos deslocamentos

$$\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n\} \quad (\text{A.3})$$

e das acelerações

$$\{\ddot{\mathbf{u}}_0, \ddot{\mathbf{u}}_1, \ddot{\mathbf{u}}_2, \dots, \ddot{\mathbf{u}}_{n-1}, \ddot{\mathbf{u}}_n\} \quad (\text{A.4})$$

onde os índices  $0, 1, 2, \dots, n-1, n$  indicam o tempo no qual as quantidades são avaliadas.

No caso do Método de Newmark as seguintes aproximações são assumidas (BATHE, 1996; HUGHES, 1987):

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_t + [(1 - \delta)\ddot{\mathbf{u}}_t + \delta\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}] \Delta t \quad (\text{A.5})$$

e

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{u}_t + \dot{\mathbf{u}}_t \Delta t + [(1/2 - \alpha)\ddot{\mathbf{u}}_t + \alpha\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}] \Delta t^2, \quad (\text{A.6})$$

onde  $\alpha$  e  $\delta$  são parâmetros que podem ser determinados para se obter diferentes propriedades de precisão e estabilidade. Além disso, considera-se que as condições iniciais  $\mathbf{u}_0$  e  $\dot{\mathbf{u}}_0$  são conhecidas, sendo que a segunda condição pode ser substituída por  $\ddot{\mathbf{u}}_0$ .

A equação (6.45) é então reescrita para um tempo qualquer  $t + \Delta t$ , o que resulta em

$$\mathbf{K}\mathbf{u}_{t+\Delta t} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t}, \quad (\text{A.7})$$

onde assume-se que a matriz de rigidez e a matriz de massa não se alteram ao longo do tempo e  $\mathbf{F}_{t+\Delta t}$  é a força aplicada no tempo considerado.

Isolando o termo  $\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$  na equação (A.6) e fazendo-se a substituição na equação (A.5) é possível obter equações para  $\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$  e  $\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$  em função dos deslocamentos a serem determinados  $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$  (BATHE, 1996). Pode-se então substituir estas quantidades na equação (A.7) para se calcular  $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$  e posteriormente calcular  $\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$  e  $\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$ . O algoritmo do Método de Newmark é apresentado abaixo (BATHE, 1996), para  $\alpha$  e  $\delta$  que respeitem

$$\delta \geq 0.50, \quad \alpha \geq 0.25(0.5 + \delta)^2. \quad (\text{A.8})$$

#### **Algoritmo A.1.** Método de Newmark para análise dinâmica

*Cálculos iniciais:*

- 1 - Obter as matrizes de rigidez  $\mathbf{K}$ , de massa  $\mathbf{M}$  e de amortecimento  $\mathbf{C}$ .
- 2 - Inicializar  $\mathbf{u}_0$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_0$  e  $\ddot{\mathbf{u}}_0$ .
- 3 - Selecionar o passo de tempo  $\Delta t$ , os parâmetros  $\alpha$  e  $\delta$  e calcular as constantes

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \quad (\text{A.9})$$

$$a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \quad (\text{A.10})$$

$$a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t} \quad (\text{A.11})$$

$$a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1 \quad (\text{A.12})$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1 \quad (\text{A.13})$$

$$a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \quad (\text{A.14})$$

$$a_6 = \Delta t(1 - \delta) \quad (\text{A.15})$$

$$a_7 = \delta \Delta t \quad (\text{A.16})$$

4 - Calcular a matriz de rigidez efetiva

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C}. \quad (\text{A.17})$$

*Para cada passo de tempo:*

1 - Calcular o vetor de forças efetivo

$$\hat{\mathbf{F}}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \mathbf{M} (a_0 \mathbf{u}_t + a_2 \dot{\mathbf{u}}_t + a_3 \ddot{\mathbf{u}}_t) + \mathbf{C} (a_1 \mathbf{u}_t + a_4 \dot{\mathbf{u}}_t + a_5 \ddot{\mathbf{u}}_t). \quad (\text{A.18})$$

2 - Obter os deslocamentos no tempo  $t + \Delta t$  resolvendo o sistema de equações

$$\hat{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{F}}_{t+\Delta t}. \quad (\text{A.19})$$

3 - Calcular as acelerações e as velocidades no tempo  $t + \Delta t$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = a_0 (\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t) - a_2 \dot{\mathbf{u}}_t - a_3 \ddot{\mathbf{u}}_t \quad (\text{A.20})$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_t + a_6 \ddot{\mathbf{u}}_t + a_7 \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}. \quad (\text{A.21})$$

A escolha de  $\alpha$  e  $\delta$  de acordo com a equação (A.8) garante estabilidade incondicional do método (BATHE, 1996). Além disso, Bathe (1996) sugere que a matriz de rigidez efetiva da equação (A.17) seja decomposta utilizando algum método de fatoração, o que permite que o sistema de equações lineares da equação (A.19) seja resolvido mais

eficientemente. Estes métodos de fatora  o e outros métodos para a soluço de sistemas de equa  es lineares são descritos em detalhes por Quarteroni et al. (2007), Kelley (1995), Bathe (1996) e Carey e Oden (1984).

## A.2 MÉTODO DA SUPERPOSI  O MODAL

O Método da Superposi  o Modal    baseado no fato de que a vibra  o de uma estrutura linear qualquer pode ser escrita como a superposi  o de vários modos fundamentais de vibra  o. Estes modos podem ser obtidos de uma análise modal da estrutura, problema que    dado por (BATHE, 1996; HUGHES, 1987):

$$\mathbf{K}\phi = \omega^2 \mathbf{M}\phi, \quad (\text{A.22})$$

onde  $\omega$  são as frequências de vibra  o e  $\phi$  são os modos de vibra  o. Os modos de vibra  o e as frequências de vibra  o podem então ser obtidas resolvendo-se o problema de autovalores e autovetores generalizados dado pela equa  o (A.22) (QUARTERONI et al., 2007; BATHE, 1996; HUGHES, 1987). A soluço será então dada por  $n$  pares  $(\omega_i, \phi_i)$ , onde  $n$     a ordem das matrizes de massa e de rigidez e    igual ao número de graus de liberdade do problema.

Define-se então uma matriz  $\Phi$  cujas colunas são compostas dos vetores  $\phi_i$  e uma matriz diagonal  $\Omega^2$  que cont  m os autovalores  $\omega_i^2$  em sua diagonal (BATHE, 1996). Estas matrizes serão da forma

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n] \quad (\text{A.23})$$

e

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.24})$$

As  $n$  solu  es para o problema dado pela equa  o (A.22) podem então ser escritas como (BATHE, 1996)

$$\mathbf{K}\Phi = \mathbf{M}\Phi\Omega^2. \quad (\text{A.25})$$

Como os autovetores são M-ortonormais (BATHE, 1996), então,

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I}. \quad (\text{A.26})$$

Pré-multiplicando a equação (A.25) por  $\Phi^T$  obtém-se

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Omega^2. \quad (\text{A.27})$$

Nota-se que a pré-multiplicação das matrizes de rigidez e de massa por  $\Phi^T$  mais a pós-multiplicação por  $\Phi$  define na verdade uma transformação de coordenadas dada pela matriz  $\Phi$ . Além disso, esta transformação faz com que as matrizes de rigidez e de massa sejam transformadas em matrizes diagonais, o que pode ser muito útil como será visto mais adiante. Aplicando-se então esta transformação à equação (6.45) obtém-se

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{x} + \Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{R}, \quad (\text{A.28})$$

onde  $\mathbf{x}$  são os deslocamentos no novo sistema de coordenadas

$$\mathbf{x} = \Phi^T \mathbf{u}, \quad (\text{A.29})$$

$\ddot{\mathbf{x}}$  são as acelerações no novo sistema de coordenadas

$$\ddot{\mathbf{x}} = \Phi^T \ddot{\mathbf{u}} \quad (\text{A.30})$$

e  $\mathbf{R}$  é o vetor de forças no novo sistema de coordenadas

$$\mathbf{R} = \Phi^T \mathbf{F}. \quad (\text{A.31})$$

Substituindo-se a equação (A.26) e a equação (A.27) na equação (A.28) obtém-se

$$\Omega^2 \mathbf{x} + \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{R}. \quad (\text{A.32})$$

As condições iniciais para a equação (A.32) são obtidas da equação (A.29) e da  $M$ -ortonormalidade de  $\Phi$  (BATHE, 1996), o que resulta em

$$\mathbf{x}_0 = \Phi^T \mathbf{M} \mathbf{u}_0 \quad (\text{A.33})$$

e

$$\ddot{\mathbf{x}}_0 = \Phi^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_0 \quad (\text{A.34})$$

Porém, como a matriz  $\Omega^2$  é diagonal, o sistema de equações dado pela equação (A.32) se reduz a  $n$  equações independentes da forma

$$\omega_i^2 x_i + \ddot{x}_i = R_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{A.35})$$

que podem ser resolvidas independentemente. A solução da equação (A.35) pode ser feita utilizando-se o Método de Newmark com um esforço computacional bastante reduzido uma vez que a equação (A.35) é escrita para apenas um grau de liberdade e portanto não há a necessidade de se resolver um sistema de equações lineares a cada passo de tempo. Isto permite que intervalos de tempo bastante reduzidos sejam utilizados possibilitando uma solução mais precisa. Além disso, a equação (A.35) pode ser também resolvida através de outros métodos de integração no tempo ou através da integral de Duhamel. Estas alternativas são descritas em mais detalhes por Bathe (1996) e Hughes (1987).

Uma vez que as  $n$  equações da equação (A.35) tenham sido resolvidas para  $x_i$ , pode-se obter a solução do problema original fazendo-se (BATHE, 1996)

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i x_i(t), \quad (\text{A.36})$$

que é na verdade a transformação dos deslocamentos  $\mathbf{x}$  para os deslocamentos  $\mathbf{u}$  originais em cada passo de tempo. Note que a solução do problema é então escrita em função dos  $n$  modos de vibração  $\phi_i$  da estrutura.

Uma das vantagens do Método da Superposição Modal é que pode-se trabalhar com um número de modos de vibração menor do que  $n$ . De forma geral é possível avaliar quais são os modos de vibração preponderantes e trabalhar apenas com estes modos, o que reduz o custo computacional da análise dinâmica. Este procedimento é descrito em detalhes por Chopra (1995).

Além disso, Carey e Oden (1983) demonstram que o MEF obtém aproximações melhores para os modos de vibração de frequências mais baixas, sendo que a aproximação dos modos de vibração com frequências mais altas podem apresentar erros bastante significativos. Portanto, ao se excluir os modos de vibração mais altos da análise pelo método da superposição modal pode-se na verdade evitar que os erros oriundos destes modos sejam considerados na análise. Portanto, a redução do número de modos de vibração que são considerados pode até mesmo levar à soluções mais precisas.